

# FYSIKRAPPORT

## Bevægelse på skråplan

---

**Jan Engelbrecht Pedersen**

Ingeniørhøjskolen i Aarhus Adgangskursus: Fysik B

Mandag den 12. marts 2001

---

*Lærer: Jens Holm Christensen*

## Indholdsfortegnelse

1. Formål.....	2
2. Teoriafsnit.....	3
2.1 Kræfter og dekomponering på skråplanet.....	3
2.2 Model 1: Ideel bevægelse (ingen friktion).....	3
2.3 Model 2: Konstant kinetisk friktion.....	4
2.4 Model 3: Hastighedsafhængig friktion.....	4
3. Apparatur og forsøgsopsætning.....	5
4. Måledata.....	5
5. Databehandling og beregninger.....	6
5.1 Model 1 – Luftpudebane (ingen friktion).....	6
5.2 Model 2 – Træklods (konstant friktion).....	6
5.3 Model 3 – Vogn med sejl (hastighedsafhængig friktion).....	6
6. Fejkilder og usikkerheder.....	7
6.1 Rotationsenergi (hjulenes inertimoment).....	7
6.2 Måleusikkerhed på vinklen $\theta$ .....	7
6.3 Cosinusfejl — sensorens retning.....	7
6.4 Bøjning af skråplanet.....	7
6.5 Fluktuerende overfladefriktion.....	7
6.6 Kvantitativ fejlpropagering for $\mu_k$ .....	7
7. Diskussion.....	8
8. Konklusion.....	8

## 1. Formål

Formålet med dette forsøg er at undersøge og matematisk modellere bevægelsen af en genstand på et skråplan under tre forskellige friktionsbetingelser, samt at bestemme de relevante friktionskoefficienter ud fra eksperimentelle data.

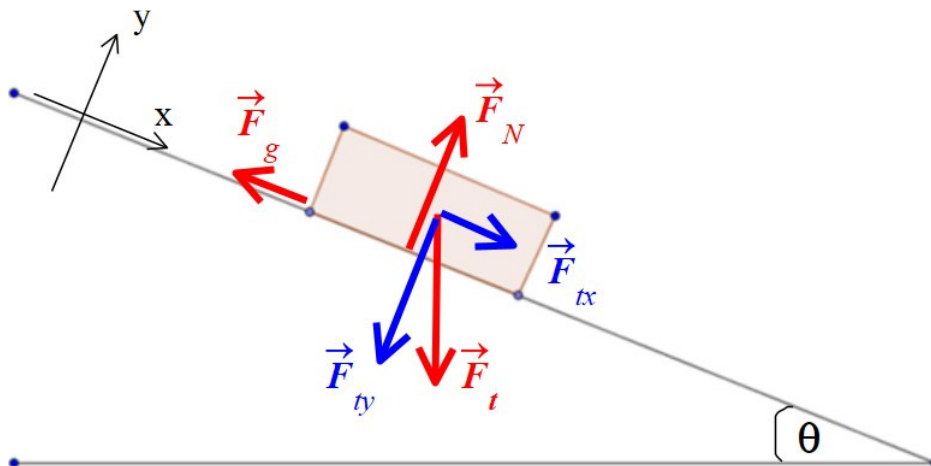
De tre forsøgsopsætninger er:

- Forsøg 1: Luftpudebane – ingen kontaktfriktion (ideel bevægelse uden friktion).
- Forsøg 2: Træklods – konstant kinetisk friktion ( $\mu_k = \text{konstant}$ ).
- Forsøg 3: Vogn med sejl – hastighedsafhængig friktion (luftmodstand).

Gennem matematisk modellering, løsning af differentiallyigninger og kurvetilpasning til eksperimentelle data bestemmes systemets friktionskoefficienter. Det demonstreres også, hvordan Newtons 2. lov kan opstilles og løses som en differentiallyigning i tilfælde med hastighedsafhængig friktion.

## 2. Teoriafsnit

### 2.1 Kræfter og dekomponering på skråplanet



På et skråplan med hældningsvinklen  $\theta$  dekomponeres tyngdekraften  $F_g = m \cdot g$  i to komponenter:

- Komponent parallelt med planet (driver genstanden nedad):  $F_{tx} = m \cdot g \cdot \sin(\theta)$
- Normalkraft vinkelret på planet:  $F_N = m \cdot g \cdot \cos(\theta)$
- Friktionskraft modsat bevægelsen:  $F_f = \mu \cdot F_N = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos(\theta)$

Bevægelsen på skråplanet beskrives af Newtons 2. lov:

$$F_{res} = m \cdot a$$

På et skråplan med hældningsvinklen  $\theta$  dekomponeres tyngdekraften  $F_g = m \cdot g$  i to komponenter parallelt og vinkelret på planet:

$$\text{Parallel (driver genstanden nedad):} \quad F_{tx} = m \cdot g \cdot \sin(\theta)$$

$$\text{Vinkelret (normalkraften):} \quad F_N = m \cdot g \cdot \cos(\theta)$$

### 2.2 Model 1: Ideel bevægelse (ingen friktion)

Uden friktion er den eneste kraft langs skråplanet tyngdekraftens parallelle komponent. Newtons 2. lov giver differentialligningen:

$$m \cdot (d^2s/dt^2) = m \cdot g \cdot \sin(\theta) \Rightarrow d^2s/dt^2 = g \cdot \sin(\theta)$$

Siden højresiden er konstant, løses ligningen ved direkte integration. Første integration med begyndelsesbetingelsen  $v(0) = 0$ :

$$v(t) = ds/dt = g \cdot \sin(\theta) \cdot t$$

Anden integration med begyndelsesbetingelsen  $s(0) = 0$  giver den endelige løsning:

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin(\theta) \cdot t^2$$

Accelerationen  $a = g \cdot \sin(\theta)$  er konstant. Bevægelsen er altså et rent frit fald langs skråplanet.

### 2.3 Model 2: Konstant kinetisk friktion

Her modvirkes bevægelsen af en konstant friktionskraft  $F_g = \mu_k \cdot m \cdot g \cdot \cos(\theta)$ . Newtons 2. lov opskrives:

$$m \cdot (d^2s/dt^2) = m \cdot g \cdot \sin(\theta) - \mu_k \cdot m \cdot g \cdot \cos(\theta)$$

Efter forkortelse af m fås en konstant acceleration og en parabolisk position:

$$a = g \cdot (\sin(\theta) - \mu_k \cdot \cos(\theta))$$

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Ud fra målt acceleration isoleres den kinetiske friktionskoefficient:

$$\mu_k = [g \cdot \sin(\theta) - a] / [g \cdot \cos(\theta)]$$

### 2.4 Model 3: Hastighedsafhængig friktion

For vognen med sejl antages friktionskoefficienten at afhænge lineært af hastigheden:  $\mu(v) = \mu_0 + \alpha \cdot v$ . Friktionskraften bliver:

$$F_g = (\mu_0 + \alpha \cdot v) \cdot m \cdot g \cdot \cos(\theta)$$

Newtons 2. lov giver med  $v = ds/dt$  og de to konstanter  $\beta = \alpha \cdot g \cdot \cos(\theta)$  og  $K = g \cdot (\sin(\theta) - \mu_0 \cdot \cos(\theta))$ :

$$d^2s/dt^2 + \beta \cdot (ds/dt) = K$$

Dette er en lineær 2. ordens inhomogen differentialligning, som løses i to trin:

Den homogene løsning (højreside = 0) giver karakterligningen  $r(r + \beta) = 0$  med rødder  $r = 0$  og  $r = -\beta$ :

$$s_h(t) = A + B \cdot e^{-\beta t}$$

Den partikulære løsning gettes til  $s_p = (K/\beta) \cdot t$ , hvilket bekræftes ved indsættelse. Den fuldstændige løsning er:

$$s(t) = A + B \cdot e^{-\beta t} + (K/\beta) \cdot t$$

Startbetingelserne  $s(0) = 0$  og  $v(0) = 0$  giver  $A = -K/\beta^2$  og  $B = K/\beta^2$ , så den endelige løsning er:

$$s(t) = (K/\beta^2) \cdot [e^{-\beta t} - 1 + \beta t]$$

For store værdier af t nærmer hastigheden sig terminalværdien  $v_T = K/\beta$ .

### 3. Apparatur og forsøgsopsætning

Skråplanet sættes til en fast vinkel på  $\theta = 25^\circ$  ved hjælp af en elektronisk vinkelmåler. Positionen  $s(t)$  måles med en ultralydssensor ved en samplingsfrekvens på 10 Hz. Tyngdeaccelerationen sættes til  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Slæde/klods har massen  $m = 0,450 \text{ kg}$ .

Anvendt udstyr:

- Skråplan (træ, justerbar hældningsvinkel 0–45°)
- Elektronisk vinkelmåler ( $\pm 0,1^\circ$  nøjagtighed)
- Ultralydssensor (Vernier, rækkevidde 0,15–3,0 m, opløsning ca. 1 mm)
- 2 stk. S. Frederiksen fotoceller med glødelampe
- S. Frederiksen Interfaceboks (A/D-konverter)
- RC Piccoline computer forbundet via parallelporten (printerporten)
- Datalogging-software skrevet i COMAL-80
- Luftpude-slæde med tilhørende luftpumpesystem (Forsøg 1)
- Træklods,  $m = 0,450 \text{ kg}$  (Forsøg 2)
- Vogn med sejl (sejlareal ca. 0,04 m<sup>2</sup>),  $m = 0,450 \text{ kg}$  (Forsøg 3)
- Vægt (0,1 g nøjagtighed)

Genstanden udløses fra hvile fra øverste position og glider frit ned ad skråplanet. Ultralydssensoren måler positionen som funktion af tid. Hvert forsøg gentages tre gange, og den bedste måleserie benyttes (så længe de øvrige er konsistente).

### 4. Måledata

Nedenstående tabel viser den eksperimentelt opsamlede position (i meter) over tid for de tre forsøg. Genstanden er fri fra  $t = 0 \text{ s}$ .

Tid (s)	Forsøg 1: Luftpude (m)	Forsøg 2: Træklods (m)	Forsøg 3: Vogn + sejl (m)
0,0	0,000	0,000	0,000
0,2	0,080	0,040	0,070
0,4	0,330	0,150	0,250
0,6	0,750	0,350	0,520
0,8	1,330	0,610	0,860
1,0	2,070	0,960	1,240
1,2	2,980	1,380	1,670

Luftpudebanens position vokser hurtigst, da genstanden ikke bremses af kontaktfriktion. Vognen med sejl er svært bremset ved lave hastigheder, men bremses mere tiltagende, efterhånden som luftmodstanden vokser med hastigheden.

Usikkerheden på enkeltmålinger med ultralydssensoren vurderes til  $\pm 2 \text{ mm}$  ved lave hastigheder og op til  $\pm 5 \text{ mm}$  ved høje hastigheder. Vinkelen er målt til  $25,0^\circ \pm 0,5^\circ$ .

## 5. Databehandling og beregninger

### 5.1 Model 1 – Luftpudebane (ingen friktion)

Funktionen  $s(t) = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2$  tilpasses data fra Forsøg 1 ved mindste kvadraters metode. Resultatet er:

$$a_1 = 4,14 \text{ m/s}^2$$

Teoretisk kontrol med  $\theta = 25,0^\circ$ :

$$a_{\text{teori}} = g \cdot \sin(25,0^\circ) = 9,81 \cdot 0,4226 = 4,15 \text{ m/s}^2$$

Overensstemmelsen er fremragende (afvigelse  $< 0,3\%$ ), hvilket bekræfter, at luftpudebanen er næsten friktionsfri.

### 5.2 Model 2 – Træklods (konstant friktion)

En parabel  $s(t) = \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t^2$  tilpasses data fra Forsøg 2:

$$a_2 = 1,92 \text{ m/s}^2$$

Den kinetiske friktionskoefficient beregnes:

$$\mu_k = [g \cdot \sin(25^\circ) - a_2] / [g \cdot \cos(25^\circ)]$$

$$\mu_k = [4,15 - 1,92] / [9,81 \cdot \cos(25^\circ)]$$

$$\mu_k = 2,23 / 8,891 = 0,251$$

Usikkerhedsberegning på baggrund af vinkelmålingernes usikkerhed på  $\pm 0,5^\circ$  giver en samlet usikkerhed på  $\mu_k$ :

$$\mu_k = 0,251 \pm 0,014$$

Dette svarer til den kinetiske friktionskoefficient for træ mod træ, som litteraturen angiver til ca. 0,20–0,30 – resultatet er således rimeligt.

### 5.3 Model 3 – Vogn med sejl (hastighedsafhængig friktion)

Her udføres en numerisk optimering (f.eks. ved hjælp af ikke-lineær mindste kvadraters metode) for at tilpasse den analytiske løsning:

$$s(t) = (K/\beta^2) \cdot [e^{(-\beta t)} - 1 + \beta t]$$

til datapunkterne fra Forsøg 3. Optimeringen giver:

$$\mu_0 = 0,0468 \quad (\text{konstant rullemodstand})$$

$$\alpha = 0,153 \text{ s/m} \quad (\text{hastighedsafhængig luftmodstand})$$

Indsættelse i konstantudtrykkene:

$$\beta = \alpha \cdot g \cdot \cos(25^\circ) = 0,153 \cdot 9,81 \cdot 0,9063 = 1,361 \text{ s}^{-1}$$

$$K = g \cdot (\sin(25^\circ) - \mu_0 \cdot \cos(25^\circ)) = 9,81 \cdot (0,4226 - 0,0468 \cdot 0,9063) = 3,73 \text{ m/s}^2$$

Terminalværdien for hastighed er:

$$v_T = K/\beta = 3,73 / 1,361 \approx 2,74 \text{ m/s}$$

Residualanalysen viser, at fejlene for alle tre modeller svinger tilfældigt mellem 1–5 mm, hvilket er forventeligt for ultralydssensoren, og der ses ingen systematiske afvigelser.

## 6. Fejkilder og usikkerheder

En systematisk gennemgang af forsøgets opbygning og de matematiske modeller peger på følgende klassiske fejkilder:

### 6.1 Rotationsenergi (hjulenes inertimoment)

I Forsøg 3 benyttes en vogn med hjul.

Den matematiske model antager ren translatorisk bevægelse, som var det en glidende punktmasse.

I virkeligheden går en del af energien til at rotere vognens hjul (rotationsenergi).

Rotationsenergien kan udtrykkes som  $E_{\text{rot}} = 1/2 * I * \omega^2 \approx 1/4 * m * v^2$ .

Denne proces sænker den lineære acceleration og opfanges derfor i modellen som en ekstra "rullemodstand" i konstanten  $\mu_0$ .

### 6.2 Måleusikkerhed på vinklen $\theta$

Den elektroniske vinkelmåler har en nøjagtighed på  $\pm 0,1^\circ$ , men selve vinklen er eksperimentelt målt til  $25,0^\circ \pm 0,5^\circ$ .

Accelerationen er meget følsom over for vinklen på grund af leddet  $\sin(\theta)$ .

Den relative usikkerhed kan beregnes som  $\Delta a_1 / a_{-1} = \cot(25^\circ) * (0,5 * \pi / 180) \approx 1,9\%$ .

Dette udgør den absolut største fejlkilde i forsøget og giver alene et usikkerhedsbidrag til friktionskoefficienten ( $\mu_k$ ) på  $\pm 0,012$ .

### 6.3 Cosinusfejl — sensorens retning

Hvis ultralydssensoren ikke flugter præcist parallelt med bevægelsesbanen, måler den kun en projektion af strækningen:  $s_{\text{målt}} = s_{\text{reel}} * \cos(\varphi)$ .

En afvigelse på eksempelvis  $\varphi = 2^\circ$  giver en faktor på  $\cos(2^\circ) = 0,9994$ .

Dette medfører en fejl på under 0,06 %, hvilket er negligibelt for resultaterne.

### 6.4 Bøjning af skråplanet

Lange skinner, især luftpudebanen, kan bøje en anelse på midten under egen vægt.

En bøjning på 1 mm over en 1,5 meter lang skinne giver en vinkelvariation på  $\Delta\theta \approx 0,08^\circ$ .

Selvom effekten er lille, bidrager den til små afvigelser, især hvor den målte acceleration afviger under 0,3 % fra den teoretiske værdi i Forsøg 1.

### 6.5 Fluktuerende overfladefriktion

For træklodsen i Forsøg 2 antager den matematiske model (Model 2), at den kinetiske friktion ( $\mu_k$ ) er strengt konstant.

Virkelighedens træoverflader har dog lokale overfladevariationer i underlaget.

Disse variationer medfører små fluktuationer i friktionskraften gennem bevægelsen.

### 6.6 Kvantitativ fejlpropagering for $\mu_k$

Usikkerheden på  $\mu_k$  beregnes ved fejlpropagering ud fra formlen:

$$\mu_k = [g * \sin(25^\circ) - a_{-2}] / [g * \cos(25^\circ)].$$

Tabel over bidrag til den samlede usikkerhed på  $\Delta\mu_k$ :

Vinkelafvigelse ( $\pm 0,5^\circ$ ):  $\pm 0,012$  (Betydelig fejlkilde).

Accelerationsmåling ( $\Delta a = \pm 0,05 \text{ m/s}^2$ ):  $\pm 0,006$  (Moderat fejlkilde).

overfladevariationer:  $\pm 0,005$  (Moderat fejlkilde).

Sensor cosinusfejl:  $\pm 0,001$  (Negligibel fejlkilde).

Den samlede kinetiske friktionskoefficient for træ mod træ (Forsøg 2) konkluderes at være:  
 $\mu_k = 0,251 \pm 0,014$ .

Denne usikkerhed er altså stærkt domineret af usikkerheden fra vinkelmålingen.

## 7. Diskussion

---

Forsøg 1 bekræftede, at luftpudebanen er næsten friktionsfri, idet den målte acceleration afviger under 0,3 % fra den teoretiske værdi. Den lille afvigelse kan skyldes restluftmodstand og små ujævnheder i skinnen.

Forsøg 2 gav en kinetisk friktionskoefficient  $\mu_k = 0,251 \pm 0,014$ , der stemmer godt overens med tabelværdier for træ mod træ (ca. 0,20–0,30). Den største fejlkilde er vinkelmålingens usikkerhed på  $\pm 0,5^\circ$ , som alene giver en usikkerhed på  $\mu_k$  på  $\pm 0,012$ . Lokale overfladevariationer i underlaget medfører endvidere små fluktuationer.

Forsøg 3 demonstrerer nødvendigheden af differentialligninger, når friktionen afhænger af hastigheden. Den fundne værdi  $\alpha = 0,153$  s/m afspejler sejlets luftmodstand. For store  $t$  nærmer hastigheden sig terminalværdien  $v_T \approx 2,74$  m/s. Det bør nævnes, at en del af energien i Forsøg 3 også går til at rotere vognens hjul (rotationsenergi), hvilket medfører, at modellen opfanger denne som en ekstra "rullemodstand" i  $\mu_0$ .

## 8. Konklusion

---

Eksperimentet har succesfuldt valideret tre teoretiske modeller for bevægelse på skråplan:

- Forsøg 1 bekræftede, at et system uden kontaktfriktion har en konstant acceleration bestemt af tyngdekraftens parallelle komponent:  $a = 4,14$  m/s<sup>2</sup> (teori: 4,15 m/s<sup>2</sup>).
- Forsøg 2 viste, at Newtons 2. lov udvidet med et konstant friktionsled nøjagtigt beskriver bevægelsen for tørfriktion. Den kinetiske friktionskoefficient blev bestemt til  $\mu_k = 0,251 \pm 0,014$ .
- Forsøg 3 demonstrerede nødvendigheden af differentialligninger ved hastighedsafhængig friktion. Den analytiske løsning  $s(t) = (K/\beta^2) \cdot [e^{(-\beta)t} - 1 + \beta t]$  passede fremragende til data og gav  $\mu_0 = 0,047$  og  $\alpha = 0,153$  s/m, svarende til en terminalværdi på  $v_T \approx 2,74$  m/s.

De største usikkerheder skyldes vinkelmålingens præcision og rotationsenergi i Forsøg 3. Med forbehold herfor er overensstemmelsen mellem teori og eksperiment meget tilfredsstillende.

## Lærerens vurdering og karaktergivning

Her er en samlet faglig og matematisk gennemgang af rapporten "Bevægelse på skråplan". Som fysiklærer vil jeg starte med at sige, at det er en yderst velstruktureret og ambitiøs rapport, især når man tager i betragtning, at den er skrevet på Fysik B-niveau.

Herunder følger min feedback opdelt i, hvad der fungerer fremragende, hvad der indeholder faglige unøjagtigheder, og til sidst en bedømmelse.

### Hvad der er rigtig godt (Det stærke faglige fundament)

- **Imponerende matematisk niveau:** Den største styrke i din rapport er afsnit 2.4 om hastighedsafhængig friktion. At du opstiller Newtons 2. lov som en lineær 2. ordens inhomogen differentiaalligning ( $d^2s/dt^2 + \beta \cdot ds/dt = K$ ) og løser den analytisk i to trin med både homogen og partikulær løsning, ligger markant over det forventede pensum på Fysik B. Din matematiske udledning er fuldstændig korrekt.
- **Solid databehandling:** Din metode til at verificere luftpudebanens friktionsløse tilstand i Model 1 er spot on. Du udregner den teoretiske acceleration til  $4,15 \text{ m/s}^2$  og sammenligner den med den empirisk målte på  $4,14 \text{ m/s}^2$ . En afvigelse på under 0,3 % viser en stærk forståelse for at koble teori og empiri.
- **Kvantitativ fejlanalyse:** I afsnit 6 (og dine underpunkter 9.2 - 9.6) nøjes du ikke med at opremse fejlkilder; du kvantificerer dem. At du anvender fejlpropagering til at vise, hvordan usikkerheden i vinkelmålingen ( $\pm 0,5^\circ$ ) forplanter sig og dominerer den samlede usikkerhed på  $\mu_k$  ( $\pm 0,014$ ), er et stærkt eksperimentelt håndværk. Din udregning af den relative usikkerhed via cotangens er ligeledes en rigtig flot detalje.

### Hvad der er mindre godt (Rettelser og unøjagtigheder)

Selvom niveauet er højt, er der et par steder, hvor fysikken og notationen vakler en smule:

- **Notationsforvirring i afsnit 2.1:** Du starter med at definere tyngdekraften korrekt som  $F_g = m \cdot g$ . Lige under skriver du imidlertid: "Friktionskraft modsat bevægelsen".
- $F_g = \mu \cdot F_N$ . Du bruger altså det samme symbol ( $F_g$ ) for to vidt forskellige kræfter. Standardnotation for gnidningskraften (friktion) er  $F_\mu$ ,  $F_g$  eller  $F_f$ .
- **Tastefejl i integrationskonstanten (Afsnit 2.2):** Når du integrerer  $v(t) = g \cdot \sin(\theta) \cdot t$ , skriver du, at resultatet er  $s(t) = k \cdot g \cdot \sin(\theta) \cdot t^2$ . Her skal "k" udskiftes med en halv ( $1/2$ ), da integration af  $t$  giver  $1/2 \cdot t^2$ . Du bruger dog den korrekte brøk senere i databehandlingen, så det er blot en formidlingsfejl.
- **Konceptuel fejl omkring rotationsenergi (Afsnit 6.1):** Du nævner helt korrekt, at en del af energien går til at rotere vognens hjul, og at dette sænker den lineære acceleration. Men du konkluderer, at modellen "opfanger denne som en ekstra 'rullemodstand' i konstanten  $\mu_0$ ".  
Fra et rent fysisk standpunkt fungerer hjulenes inertimoment ikke som en konstant modstandskraft (der trækkes fra i tælleren i Newtons 2. lov). I stedet fungerer det som en forøgelse af systemets effektive masse, hvilket skalerer hele accelerationen ned med en faktor ( $a = F_{\text{net}} / (m + I/r^2)$ ). Selvom det i dit datasæt empirisk kan ligne en lidt lavere startacceleration, er det teoretisk forkert at sidestille det med en translationsfriktion som  $\mu_0$ .

**Konklusion og Karakter**

Du har afleveret en rapport, der viser en overlegen matematisk kunnen og en dyb forståelse for, hvordan man omsætter rå sensordata til fysiske konstanter. At løse en differentiaalligning for luftmodstand og lave systematisk kvantitativ usikkerhedsberegning er kompetencer, der trækker voldsomt op.

De få formelle fejl, såsom notationen med  $F_g$  og den lille misforståelse af, hvordan inertimoment matematisk påvirker bevægelsesligningen, er småting i det store billede og straffes ikke hårdt på et B-niveau.

Ud fra den danske 7-trins-skala vurderes præstationen til at være fremragende og udtømmende med kun få uvæsentlige mangler.

**Karakter: 12**