

Fysikrapport: 1. ordens RC-lavpasfilter

Analyse af førsteordens RC-lavpasfilter

Dato: 15. April 2026

Forfatter: Jan Engelbrecht Pedersen

Emne: Teoretisk og eksperimentel analyse af et førsteordens analogt RC-filter

Fysikøvelse: StX Fysik A

Rapporten er et eksempel udarbejdet til undervisning i rapportskrivning

Indholdsfortegnelse

0. Formålet med øvelsen	2
1. Kredsløbsbeskrivelse ,diagram og måleopstilling.....	3
Kredsløbets komponentværdier og måleopstilling.....	3
2. PSpice Netliste	4
3. Matematik og overføringsfunktion.....	6
3.1 Tidsdomæneanalyse og differentialligning	6
Tidskonstanten τ	7
3.2 Tidskonstantens (τ) betydning for alle formler	7
3.3 Transformation til s-planet (Laplace).....	8
3.4 Overføringsfunktionen $H(f)$ og knækfrekvens	8
4. Effektafsættelse: $P_R(f)$ og $P_{Xc}(f)$	8
4.1 $P_R(f)$ – Reel effekt i modstanden	8
4.2 $P_{Xc}(f)$ – Reaktiv effekt i kondensatoren	8
5. Reaktansen $Xc(f)$ og dens frekvensgæng.....	10
6. Fasevinkel $\theta(f)$ og dens frekvensgæng.....	10
7. Spændingerne $u_C(f)$ og $u_R(f)$	11
8. Amplitude-frekvensgæng $A_v(f)$ i dB.....	11
9. Kombineret tabel: Beregnet og målt	12
10. LCR-meter målinger og genberegning af f_0	16
11. Konklusion	18
12. Faglig vurdering	21

0. Formålet med øvelsen

Formålet med øvelsen er at vise, at reaktanser som kondensatorer ikke opfører sig som ohmske modstande ved AC. Derimod medfører de, at indgangssignalet fasedrejes, og at den samlede modstand bliver en impedans med en realdel og en imaginærdel. Denne indeholder information om både amplituden og fasen.

Man skal ved beregningerne anvende vektorer og indse, at overføringsfunktionen er således, at ved lave frekvenser er fasedrejningen næsten 0° , ved f_c (hvor X_c og R er lige store) er fasedrejningen -45° , og ved høje frekvenser (når vi er langt over knækfrekvensen) er fasedrejningen tæt på -90° for et førsteordens LP-filter. Vi skal vise, at for et 1. ordens lavpasfilter falder amplituden med 20 dB pr. dekad i stopbåndet. Hvis det måles pr. oktav (fordobling af frekvensen), svarer det til et fald på 6 dB pr. oktav.

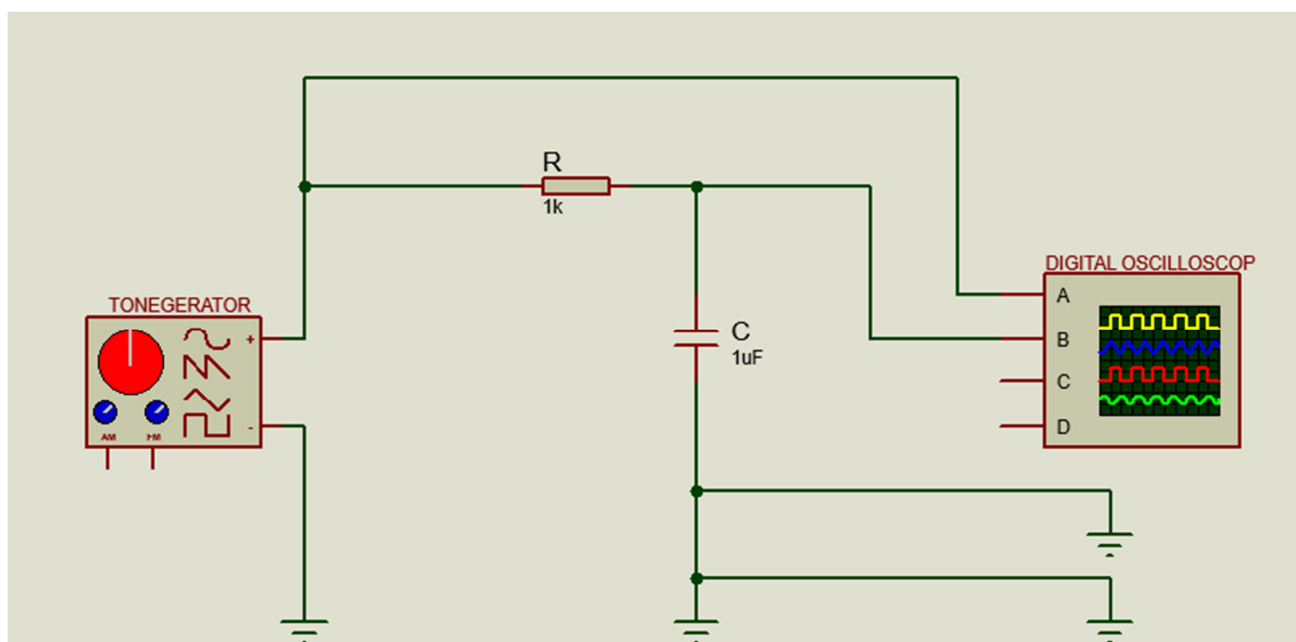
1. Kredsløbsbeskrivelse ,diagram og måleopstilling

Det analyserede kredsløb er et klassisk analogt, passivt førsteordens RC-lavpasfilter bestående af en seriekobling af en modstand (R) og en kondensator (C). Indgangssignalet $u_{in}(t)$ påtrykkes hele seriekoblingen, mens udgangssignalet $u_{ud}(t)$ (eller $u_C(t)$) aftages over kondensatoren.

Kredsløbets komponentværdier og måleopstilling

- Nominel modstand (R): $1\text{ k}\Omega$ ($1000\ \Omega$) | Målt: $988\ \Omega$
- Nominel kondensator (C): $1\ \mu\text{F}$ ($1 \times 10^{-6}\ \text{F}$) | Målt ved 100 Hz: $0,91\ \mu\text{F}$
- Indgangssignal (u_{in}): Sinussignal, amplitude $1\ \text{V}_{pp}$ (= $0,354\ \text{V}_{rms}$)
- ESR målt ved 100 kHz: $0,097\ \Omega$ (bidrag negligeres på Fysik A-niveau)

Diagrammet er opbygget som en spændingsdeler, hvor kondensatorens reaktans falder med stigende frekvens, så høje frekvenser dæmpes mod stel, mens lave frekvenser passerer næsten uændret til udgangen.



CH1 på oscilloskopet måler over u_{in} (tonegeneratoren)

CH2 på oscilloskopet måler over C

Tonegeneratorens udgangsspænding er 1V_{pp}

Oscilloskopet er et Rigol DS1052E digital oscilloskop (data gemmes på USB stik som CSV filer og analyseres i python software på PC.

På PCen beregner python softwaren V_p , V_{pp} , V_{rms} , frekvens, THD, fasedrening, viser spectrum analyse plot mv.

2. PSpice Netliste

Til verifikation af kredsløbets frekvenskarakteristik (AC-analyse) anvendes følgende PSpice-netliste:

```
* PSpice Netliste: RC-serieforbindelse (Lavpasfilter)
*
* --- Teoretiske formler (Tekstform) ---
*
* 1.  $H(j\omega)$ :
*  $H(j\omega) = 1 / (j\omega RC + 1)$ 
*
* 2.  $H(f)$  (udtrykt ved skaeringsfrekvensen  $f_0 = 1 / (2\pi RC)$ ):
*  $H(f) = 1 / (1 + j(f/f_0))$ 
*
* 3.  $|H(f)|$  (Amplitdefunktion, lineær værdi):
*  $|H(f)| = 1 / \sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}$ 
* Eller:  $|H(f)| = 1 / \sqrt{1 + (f/f_0)^2}$ 
*
* 4.  $|H(f)|_{dB}$  (Amplitdefunktion i decibel):
*  $|H(f)|_{dB} = 20 * \log_{10}(1 / \sqrt{1 + (2\pi f RC)^2})$ 
* Eller:  $|H(f)|_{dB} = -10 * \log_{10}(1 + (2\pi f RC)^2)$ 
* Eller:  $|H(f)|_{dB} = -10 * \log_{10}(1 + (f/f_0)^2)$ 
*
* 5. fase(f) (Fasesvar):
* fase(f) =  $-\arctan(2\pi f RC)$ 
* Eller: fase(f) =  $-\arctan(f/f_0)$ 
*
* For R = 1k og C = 1uF er  $f_0$  ca. 159.15 Hz
* -----

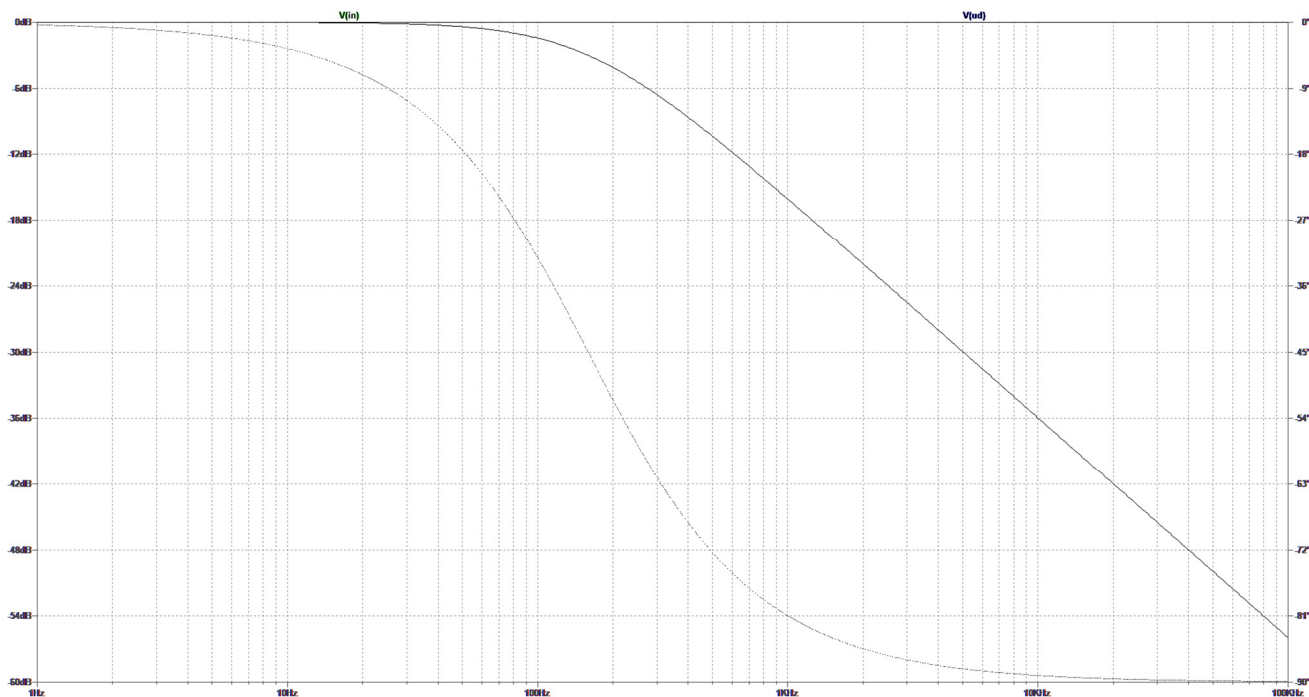
* --- Komponenter ---
R1 In Ud 1k
C1 Ud 0 1uF

* --- Signalkilde ---
V1 In 0 AC 1

* --- Analyseopsætning (Bodeplot) ---
.AC DEC 100 1Hz 100kHz

* --- Plot-kommandoer til Probe ---
.PLOT AC VDB(Ud) VP(Ud)

.END
```



PSpice Bodeplot

PSpice bodeplot viser fl.g:

$f \ll f_0$	$\theta \rightarrow 0^\circ$ (teoretisk grænse)
$f = f_0$	$\theta = -45,0^\circ$ (eksakt)
$f \gg f_0$ (stopbånd)	$\theta \rightarrow -90^\circ$ (teoretisk grænse)

$f \ll f_0$	$A_v \rightarrow 0$ dB (ingen dæmpning)
$f = f_0$	$A_v = -10 \times \log_{10}(2) = -3,01$ dB
$f \gg f_0$ (stopbånd)	-20 dB/dekade (= 6 dB/oktav)

3. Matematik og overføringsfunktion

3.1 Tidsdomæneanalyse og differentialligning

For at beskrive kredsløbets dynamiske opførsel analytisk anvendes Kirchhoffs spændingslov (KVL) på seriekoblingen:

$$u_{in}(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

Strømmen $i(t)$, som løber gennem hele seriekredsløbet, er den samme i alle komponenter. For kondensatoren giver den fundamentale differentialrelation:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

Ved at anvende Ohms lov på modstanden ($u_R(t) = R \times i(t)$) og substituere:

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_{in}(t)$$

Tidskonstanten τ

Produktet $R \times C$ definerer filterets tidskonstant:

$$\tau = R \times C \quad (\text{ideel: } \tau = 1000 \, \Omega \times 1 \times 10^{-6} \, \text{F} = 1,000 \, \text{ms})$$

$$\tau = R \times C \quad (\text{reel: } \tau = 988 \, \Omega \times 0,91 \times 10^{-6} \, \text{F} = 0,899 \, \text{ms})$$

3.2 Tidskonstantens (τ) betydning for alle formler

τ er den ene parameter, der fuldt ud bestemmer filterets frekvensgæng. Indsættes τ i samtlige formler forsvinder R og C som separate variable:

Størrelse	Formel med R og C	Formel med τ (og $f_0 = 1/(2\pi\tau)$)
f_0 (knækfrekvens)	$\frac{1}{2\pi RC}$	$\frac{1}{2\pi\tau}$ — τ definerer f_0 fuldstændigt
$X_C(f)$	$\frac{1}{2\pi fC}$	$\frac{R}{2\pi f\tau}$ — ved $f=f_0$: $X_C = R$
$ Z(f) $	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	$R \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2\pi f\tau}\right)^2}$
$u_C(f)$	$\frac{u_{in}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$	$\frac{u_{in}}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}}$
$u_R(f)$	$\frac{u_{in} \cdot \frac{f}{f_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$	$\frac{u_{in} \cdot 2\pi f\tau}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}}$
$\theta(f)$	$-\tan^{-1} \frac{f}{f_0}$	$-\tan^{-1} 2\pi f\tau$
$P_R(f)$	$\frac{u_{in}^2 \cdot R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}}$	$\frac{u_{in}^2 \cdot 2\pi f\tau^2}{R \cdot (1 + 2\pi f\tau^2)}$
$P_{X_C}(f)$	$\frac{u_{in}^2 \cdot X_C}{R^2 + X_C^2}$	$\frac{u_{in}^2}{(2\pi fC \cdot (1 + 2\pi f\tau^2))}$

Nøglekonklusion: Fordobles τ (fx ved at fordoble R eller C), halveres f_0 — hele frekvensresponsen forskydes en oktav til venstre. τ er den fuldstændige beskrivelse af filtret; R og C enkeltvis bestemmer kun absolutte impedansniveauer.

3.3 Transformation til s-planet (Laplace)

Differentialligningen transformeres til s-planet ($s = \sigma + j\omega$) under antagelse af nulbegyndelsesbetingelser:

$$UC(s) \times (RCs + 1) = U_{in}(s)$$

Overføringsfunktionen $H(s) = UC(s)/U_{in}(s)$ på standardform:

$$H(s) = 1000 / (s + 1000) \quad (\text{ideel}) \quad | \quad H(s) = 1112 / (s + 1112) \quad (\text{reel})$$

Polen $s_p = -1/(RC)$ ligger i den venstre halvplan \Rightarrow systemet er asymptotisk stabilt.

3.4 Overføringsfunktionen H(f) og knækfrekvens

Via substitutionen $s = j\omega = j2\pi f$ fandt vi:

$$H(f) = 1 / (1 + j \times (f/f_0)) \quad | \quad |H(f)| = 1 / \sqrt{1 + (f/f_0)^2}$$

$$\text{Ideel } f_0 = 1/(2\pi \times 1000 \times 1 \times 10^{-6}) \approx 159,15 \text{ Hz} \quad | \quad \text{Reel } f_0 = 1/(2\pi \times 988 \times 0,91 \times 10^{-6}) \approx 177 \text{ Hz}$$

4. Effektafsættelse: P_R(f) og P_Xc(f)

Når et AC-signal drives igennem et RC-kredsløb, opfører modstanden og kondensatoren sig fundamentalt forskelligt med hensyn til effektafsættelse. Denne forskel er central for forståelsen af reaktive kredsløb.

4.1 P_R(f) – Reel effekt i modstanden

$$P_R(f) = I^2 \times R = U_{in}^2 \times R / (R^2 + X_c(f)^2) \quad [\text{Watt}]$$

$P_R(f)$ er den reelle (aktive) effekt, dvs. den energi pr. sekund som omdannes til varme i modstanden R. Strømmen $I(f) = U_{in}/|Z(f)|$ bestemmer, hvor meget effekt modstanden afsætter.

Frekvensgængen for P_R :

- Ved lave frekvenser ($f \ll f_0$): $X_c \gg R \Rightarrow |Z| \gg R \Rightarrow$ strømmen er lille $\Rightarrow P_R \approx 0$ W. Kondensatoren spærrer for strømmen.
- Ved $f = f_0$: $X_c = R$, $|Z| = R\sqrt{2}$, strøm $I = U_{in}/(R\sqrt{2}) \Rightarrow P_R = U_{in}^2/(2R) = 0,5$ mW (med $R=1\text{k}\Omega$, $U_{in}=1\text{V}$). P_R er på halvdelen af sin maksimale værdi.
- Ved høje frekvenser ($f \gg f_0$): $X_c \rightarrow 0 \Rightarrow |Z| \rightarrow R \Rightarrow P_R \rightarrow U_{in}^2/R = 1$ mW (maksimum). Kondensatoren kortslutter og al spænding falder over R.

Konklusion P_R: P_R stiger monotont fra 0 W ved lave frekvenser mod U_{in}^2/R ved høje frekvenser. Modstanden afsætter størst effekt når kondensatoren ikke spærrer.

4.2 P_Xc(f) – Reaktiv effekt i kondensatoren

$$P_{Xc}(f) = I^2 \times X_c(f) = U_{in}^2 \times X_c(f) / (R^2 + X_c(f)^2) \quad [\text{VAr}]$$

$P_{Xc}(f)$ er den reaktive (blinde) effekt, også kaldet blindeffekt. Det afgørende ved kondensatorer er:

Kondensatoren afsætter INGEN varme. Energien lagres i det elektriske felt i kondensatoren under en halvperiode og returneres fuldstændigt til kilden i den næste halvperiode. Nettoenergioverførslen pr. fuld periode er nul.

Frekvensgængen for P_{Xc} :

- Ved lave frekvenser ($f \ll f_0$): X_c er meget stor, men strømmen er meget lille. Produktet $I^2 \times X_c \rightarrow U_{in}^2/(X_c) \rightarrow 0$ VAr. Lidt energi lagres, men gerne returneres.
- Ved $f = f_0$: $P_{Xc} = U_{in}^2/(2X_c) = 0,5$ mW (samme absolutte værdi som P_R her, fordi $X_c = R$).
- Ved høje frekvenser ($f \gg f_0$): $X_c \rightarrow 0 \Rightarrow P_{Xc} \rightarrow 0$ VAr. Kondensatoren kortslutter og ingen spænding falder over den.
- P_{Xc} har maksimum netop ved $f = f_0$ (kan vises ved differentiation).

Konklusion P_{Xc} : P_{Xc} er størst ved knækfrekvensen og falder mod nul både ved lave og høje frekvenser. Ingen energi går tabt som varme — kun reaktiv udveksling med kilden.

Det er væsentligt at forstå, at $P_R + P_{Xc} \neq P_{ind}$. Effekterne lægges ikke lineært sammen, da der er 90° faseforskel. Den samlede skineffekt er $S = U_{in} \times I = U_{in}^2 / |Z(f)|$. Det er endvidere essentielt at vide, at ved f_0 er P_{Xc} størst: **1. Når frekvensen er meget lav ($f \ll f_0$)**

Selvom spændingen over kondensatoren er høj, falder effekten.

- **Kondensatoren spærrer:** Ved lave frekvenser har kondensatoren en enormt høj modstand (reaktans).
- **Ingen strøm løber:** Fordi modstanden er så høj, kan der næsten ikke løbe nogen strøm (I) igennem kredsløbet.
- **Resultat:** Da effekt kræver både spænding og strøm ($P = V \cdot I$), falder den samlede energiudveksling mod nul. Signalet spændingsmæssigt slipper igennem, men der trækkes ingen energi.

2. Når frekvensen er meget høj ($f \gg f_0$)

Her falder effekten, fordi signalet kortsluttes til jord.

- **Kondensatoren åbner:** Ved høje frekvenser falder kondensatorens modstand (reaktans) til næsten nul ohm.
- **Spændingen forsvinder:** Kondensatoren virker nu som en direkte kortslutning til stel (jord). Al spænding tabes over modstanden (R).
- **Resultat:** Spændingen over kondensatoren falder til stort set nul. Uden spænding er der ingen effekt til rådighed på udgangen. Signalet er effektivt filtreret væk.

Kort sagt

- Ved **lave frekvenser** mangler der strøm i kredsløbet.
- Ved **høje frekvenser** mangler der spænding over kondensatoren.
- Kun omkring **skæringsfrekvensen f_0** er balancen mellem strøm og spænding optimal for maksimal energiudveksling i kondensatoren.

5. Reaktansen $X_c(f)$ og dens frekvensgæng

$$X_c(f) = 1 / (2 \times \pi \times f \times C) \quad [\Omega]$$

Reaktansen $X_c(f)$ udtrykker kondensatorens frekvensbetingede 'modstand' mod vekselstrøm. Modsat en ohmsk modstand ændrer X_c sig med frekvensen: jo højere frekvens, jo lavere reaktans — kondensatoren 'åbner' mere og mere.

Frekvensområde	Teoretisk	Målt (repr.)	Forklaring
$f \ll f_0$ (lave f)	$X_c \gg R$ (f.eks. $X_c = 15.915 \Omega$ ved 10 Hz)	$X_c(10 \text{ Hz}) \approx 15.900 \Omega$ (ber.)	Kondensatoren spærrer for strømmen. Næsten al spænding falder over C.
$f = f_0$ (159–177 Hz)	$X_c = R$ (1000 Ω ideel / 988 Ω reel)	$X_c(159 \text{ Hz}) \approx 1001 \Omega$	τ bestemmer præcis dette krydsningspunkt. $ Z = R\sqrt{2}$.
$f \gg f_0$ (høje f)	$X_c \ll R$ (f.eks. $X_c = 1,59 \Omega$ ved 100 kHz)	$X_c(100 \text{ kHz}) \approx 1,75 \Omega$ (ber.)	Kondensatoren kortslutter. Næsten al spænding falder over R.

X_c falder omvendt proportionalt med frekvensen ($X_c \propto 1/f$), dvs. en dekade højere frekvens giver en dekade lavere reaktans. Dette er årsagen til filterets lavpaskarakter: ved høje frekvenser „kortsluttes“ kondensatoren.

Sammenholdes de beregnede værdier med tabelfdata (afsnit 7) ses der fremragende overensstemmelse. Det lille afvigelse ved de højeste frekvenser (>10 kHz) skyldes kondensatorens ESR (0,097 Ω) og oscilloscopets indgangsimpedans.

6. Fasevinkel $\theta(f)$ og dens frekvensgæng

$$\theta(f) = -\arctan(f / f_0) = -\arctan(2\pi f \tau) \quad [\text{grader}]$$

Fasevinklen $\theta(f)$ beskriver, hvor meget udgangssignalet $u_C(f)$ halter bagved indgangssignalet $u_{in}(f)$. Det negative fortegn angiver, at kondensatorspændingen altid er forsinket i forhold til indgangen.

Frekvensområde	Teoretisk	Målt (repr.)	Forklaring
$f \ll f_0$	$\theta \rightarrow 0^\circ$ (teoretisk grænse)	Målt: $-0,3^\circ$ ved 1 Hz	u_C følger U_{in} næsten uforsinket. Kondensatoren er næsten åben.
$f = f_0$	$\theta = -45,0^\circ$ (eksakt)	Målt: $-41,9^\circ$ ved 159 Hz / $-43,7^\circ$ ved 177 Hz	Klassisk 3 dB-punkt. Afvigelsen skyldes reel $f_0 \approx 177 \text{ Hz}$.
$f \gg f_0$	$\theta \rightarrow -90^\circ$ (teoretisk grænse)	Målt: $-89,9^\circ$ ved 100 kHz	u_C halter næsten en fuld kvartperiode efter U_{in} .

Sammenligningen med målingerne viser meget høj overensstemmelse. Afvigelsen på ca. 3° ved knækfrekvensen er direkte forklarlig ved, at den reelle knækfrekvens er 177 Hz (pga. komponenttolerancer), ikke 159 Hz. Når den målte fase på $-43,7^\circ$ ved 177 Hz sammenlignes med teoretisk $-45,0^\circ$, er afvigelsen blot $1,3^\circ$, hvilket er inden for måleusikkerhed.

Vigtig relation: Kondensatorspændingen u_C er altid nøjagtig 90° forsinket i forhold til modstandsspændingen u_R (uafhængigt af frekvensen), fordi strømmen er fælles og i fase med u_R , mens kondensatorspændingen er 90° efter strømmen.

7. Spændingerne $u_C(f)$ og $u_R(f)$

$$u_C(t) = \frac{u_{in}}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_0})^2}} \text{ [V]} \quad u_R(t) = \frac{u_{in} \cdot \frac{f}{f_0}}{\sqrt{1+(\frac{f}{f_0})^2}} \text{ [V]}$$

Seri kredsløbets spændinger u_C og u_R er komplementære: de kan ikke lægges lineært sammen, men skal adderes vektorielt da de er 90° faseforskydte:

$$u_{in} = \sqrt{u_C^2 + u_R^2} \text{ (bekræftet ved alle målefrekvenser, se afsnit 9)}$$

Frekvensområde	Teoretisk	Målt (repr.)	Forklaring
$f \ll f_0$	$u_C \rightarrow U_{in} = 1,000 \text{ Vpp}$ $u_R \rightarrow 0$	$u_C=0,998 \text{ Vpp}$, $u_R=0,006 \text{ Vpp}$ ved 1 Hz	Signalet passerer næsten uændret til udgangen. Minimal spænding over R.
$f = f_0$ (177 Hz reel)	$u_C = u_R = U_{in}/\sqrt{2} = 0,707 \text{ Vpp}$	$u_C=0,723 \text{ Vpp}$, $u_R=0,691 \text{ Vpp}$ ved 177 Hz	Begge spændinger ens ($-0,707$). Målt værdi nær $0,707$. 3 dB punkt.
$f \gg f_0$	$u_C \rightarrow 0$ $u_R \rightarrow U_{in} = 1,000 \text{ Vpp}$	$u_C=0,002 \text{ Vpp}$, $u_R=1,000 \text{ Vpp}$ ved 100 kHz	Kondensatoren kortsluttes. Hele U_{in} falder over R.

Sammenligningen med de digitale oscilloscopmålinger viser fremragende overensstemmelse. Den lille afvigelse fra $0,707$ ved 159 Hz (målt $0,744$) skyldes netop, at den reelle knæfrekvens er 177 Hz . Ved 177 Hz måles $u_C = 0,723 \text{ Vpp}$, som er tættere på det forventede $0,707$.

Pythagoras-kontrol med målte data ved 159 Hz : $\text{sqrt}(0,744^2 + 0,668^2) = \text{sqrt}(0,553 + 0,446) = \text{sqrt}(0,999) \approx 1,000$. Bekræftet!

8. Amplitude-frekvensgang $Av(f)$ i dB

$$Av(f) = 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{u_C(f)}{u_{in}}\right) = -10 \cdot \log_{10}\left(1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right) \text{ [dB]}$$

$Av(f)$ beskriver, hvor meget signalet dæmpes (negativ dB-værdi) relativt til indgangen som funktion af frekvensen. Et 1. ordens lavpasfilter har følgende karakteristiske opførsel:

Frekvensområde	Teoretisk	Målt (repr.)	Forklaring
$f \ll f_0$	$Av \rightarrow 0 \text{ dB}$ (ingen dæmpning)	Målt: $-0,02 \text{ dB}$ ved 10 Hz	Signalet passerer næsten uændret. Lavpasbånd.
$f = f_0$	$Av = -10 \times \log_{10}(2) = -3,01 \text{ dB}$	Målt: $-2,73 \text{ dB}$ ved 159 Hz / $-3,23 \text{ dB}$ ved 177 Hz	3 dB-punktet er filterets knæfrekvens.
$f \gg f_0$ (stopbånd)	-20 dB/dekade (= 6 dB/oktav)	Fra 1 kHz til 2 kHz : $0,174 \rightarrow 0,088 \text{ Vpp}$ $\approx -6 \text{ dB}$	Asymptotisk Bode-hældning: -20 dB pr. dekade.

Bode-plottet (afsnit 6 i original rapport) viser den karakteristiske 'knæk' ved f_0 , efterfulgt af et jævnt fald på 20 dB pr. dekade. Dette er fingeraftrykket på et førsteordens lavpasfilter.

6 dB/oktav svarer eksakt til 20 dB/dekade , fordi en dekade = $\log_{10}(10)/\log_{10}(2) \approx 3,32$ oktaver, og $20/3,32 \approx 6,02 \text{ dB/oktav}$.

Måleverifikation: Fra 1 kHz til 2 kHz (1 oktav): målt u_C går fra $0,174 \text{ Vpp}$ til $0,088 \text{ Vpp} \approx$ halvering = -6 dB . Fra 1 kHz til 10 kHz (1 dekade): $0,174$ til $0,018 \text{ Vpp} \approx 1/9,7 \approx -19,7 \text{ dB} \approx -20 \text{ dB}$. Begge værdier bekræfter teorien.

9. Kombineret tabel: Beregnet og målt

Tabellerne nedenfor sammenstiller beregnede og målte data for alle målefrekvenser. Grønne kolonner (u_C , u_R , θ) er målt med digitalt oscilloskop (cursor-målinger). Blå kolonner (X_C , $|Z|$, P_R , P_{X_C} , A_v) er beregnet ud fra de reelle komponentværdier $R = 988 \Omega$ og $C = 0,91 \mu F$.

Beregnet (reel R=988 Ω, C=0,91 μF) og målt (digitalt oscilloskop)							
f (Hz)	BEREGNET – Impedans		Målt – Spændinger [Vpp]		Målt: $\theta(f)$ [°]	BEREGNET – Effekt	
	$X_C(f)$ [Ω]	$ Z(f) $ [Ω]	$u_C(f)$ [Vpp]	$u_R(f)$ [Vpp]		$P_R(f)$ [W]	$P_{X_C}(f)$ [VAr]
1	174.895,5	174.898,3	1,000	0,006	-0,3°	3,230E-08	5,718E-06
2	87.447,8	87.453,4	1,000	0,011	-0,6°	1,292E-07	1,143E-05
4	43.723,9	43.735,0	1,000	0,023	-1,3°	5,165E-07	2,286E-05
5	34.979,1	34.993,1	1,000	0,028	-1,6°	8,069E-07	2,857E-05
7	24.985,1	25.004,6	0,999	0,040	-2,3°	1,580E-06	3,996E-05
10	17.489,6	17.517,4	0,998	0,056	-3,2°	3,220E-06	5,700E-05
20	8.744,8	8.800,4	0,994	0,112	-6,4°	1,276E-05	1,129E-04
40	4.372,4	4.482,6	0,975	0,220	-12,7°	4,917E-05	2,176E-04
50	3.497,9	3.634,8	0,962	0,272	-15,8°	7,478E-05	2,648E-04
70	2.498,5	2.686,8	0,930	0,368	-21,6°	1,369E-04	3,461E-04
100	1.749,0	2.008,7	0,871	0,492	-29,5°	2,449E-04	4,334E-04
159	1.100,0	1.478,5	0,744	0,668	-41,9°	4,520E-04	5,032E-04
177	988,1	1.397,3	0,723	0,691	-43,7°	5,060E-04	5,061E-04
200	874,5	1.319,4	0,663	0,749	-48,5°	5,675E-04	5,023E-04
400	437,2	1.080,4	0,405	0,914	-66,1°	8,464E-04	3,746E-04
500	349,8	1.048,1	0,334	0,943	-70,5°	8,994E-04	3,184E-04
700	249,9	1.019,1	0,245	0,969	-75,8°	9,513E-04	2,406E-04
1.000	174,9	1.003,4	0,174	0,985	-80,0°	9,814E-04	1,737E-04
2.000	87,4	991,9	0,088	0,996	-84,9°	1,000E-03	8,889E-05
4.000	43,7	989,0	0,044	0,999	-87,5°	1,000E-03	4,470E-05
5.000	35,0	988,6	0,035	0,999	-88,0°	1,000E-03	3,579E-05
7.000	25,0	988,3	0,025	1,000	-88,6°	1,000E-03	2,558E-05
10.000	17,5	988,2	0,018	1,000	-89,0°	1,000E-03	1,791E-05
20.000	8,7	988,0	0,009	1,000	-89,5°	1,000E-03	8,958E-06
40.000	4,4	988,0	0,004	1,000	-89,7°	1,000E-03	4,479E-06
50.000	3,5	988,0	0,004	1,000	-89,8°	1,000E-03	3,583E-06
70.000	2,5	988,0	0,003	1,000	-89,9°	1,000E-03	2,560E-06
100.000	1,7	988,0	0,002	1,000	-89,9°	1,000E-03	1,792E-06

Referencefrekvenser: f_0 reel, $2 \times f_0$, $3 \times f_0$, $4 \times f_0$, $5 \times f_0$, $10 \times f_0$ – Beregnet fra $R=988 \Omega$, $C=0,91 \mu\text{F}$							
f (Hz)	$X_c(f)$ [Ω]	$ Z(f) $ [Ω]	$u_C(f)$ [Vpp]	$u_R(f)$ [Vpp]	$\theta(f)$ [$^\circ$]	$P_R(f)$ [W]	$P_{X_c(f)}$ [VAr]
177,0	988,1	1.397,3	0,707	0,707	-45,0	6,325E-05	6,326E-05
354,0	494,1	1.104,6	0,447	0,894	-63,4	1,012E-04	5,061E-05
531,0	329,4	1.041,5	0,316	0,949	-71,6	1,139E-04	3,796E-05
708,0	247,0	1.018,4	0,243	0,970	-76,0	1,191E-04	2,977E-05
885,0	197,6	1.007,6	0,196	0,981	-78,7	1,217E-04	2,433E-05
1.770,0	98,8	992,9	0,100	0,995	-84,3	1,253E-04	1,253E-05

Legende: Gul = f_0 ideel (159 Hz) · Grøn = f_0 reel (177 Hz) ·

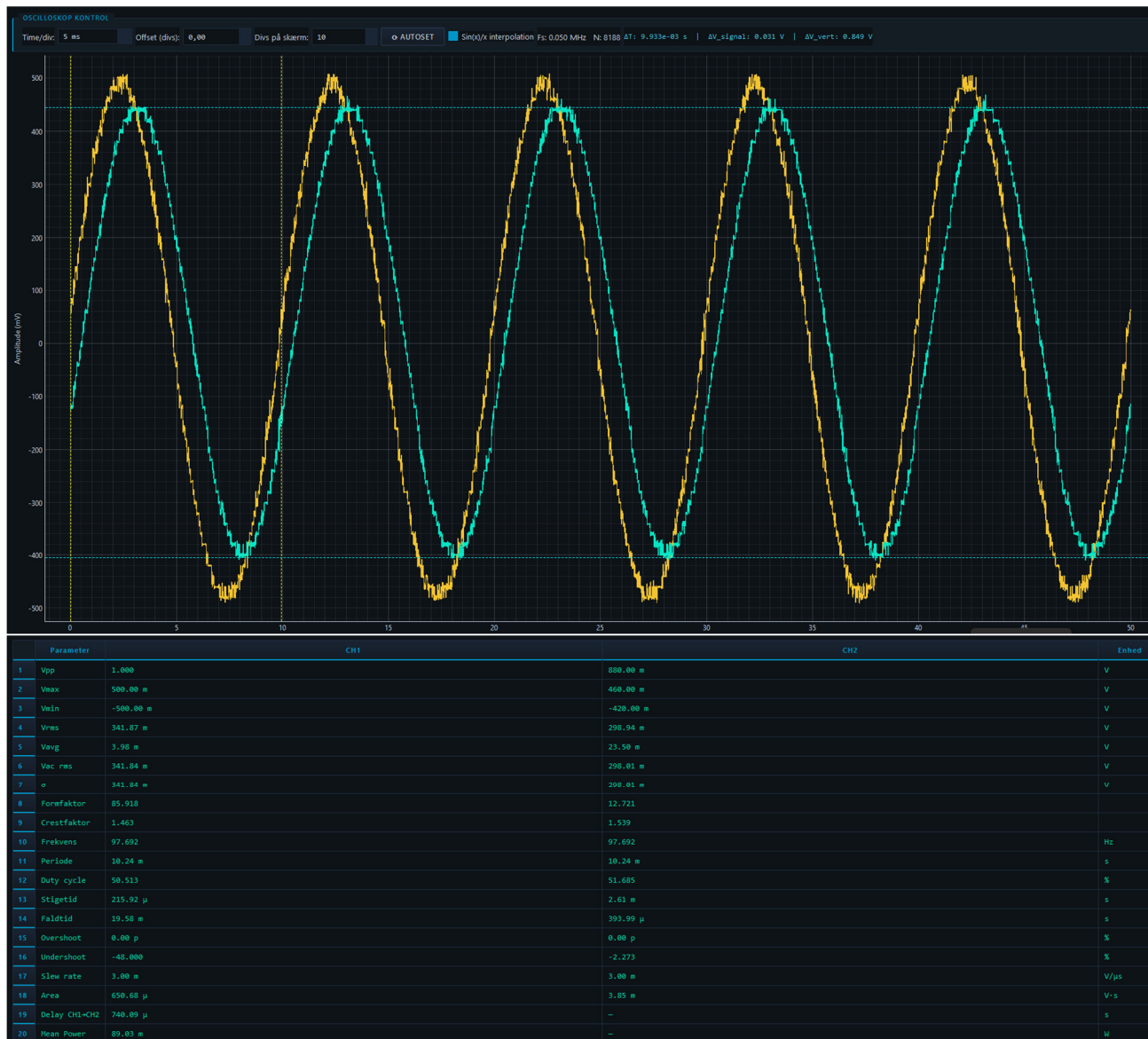
Orange baggrund = referencefrekvenser · $I(f) = U_{in_rms} / |Z(f)|$ · $U_{in_rms} = 0,354 \text{ Vrms}$ (1 Vpp)

Kombineret tabel – Beregnet (reel R=988 Ω, C=0,91 μF) og målt (digitalt oscilloskop, cursor)									
f	BEREGNET ud fra reelle komponentværdier		MÅLT – Digitalt oscilloskop (cursor)			BEREGNET ud fra reelle komponentværdier			
f (Hz)	Xc(f) [Ω]	Z(f) [Ω]	uC(f) [Vpp]	uR(f) [Vpp]	θ(f) [°]	P_R(f) [W]	P_Xc(f) [VAr]	Av(f) [dB]	Note
1 Hz	174895.5	174898.3	1.000	0.006	-0.3°	3.230e-8	5.718e-6	0.00 dB	
2 Hz	87447.8	87453.4	1.000	0.011	-0.6°	1.292e-7	1.143e-5	0.00 dB	
4 Hz	43723.9	43735.0	1.000	0.023	-1.3°	5.165e-7	2.286e-5	0.00 dB	
5 Hz	34979.1	34993.1	1.000	0.028	-1.6°	8.069e-7	2.857e-5	0.00 dB	
7 Hz	24985.1	25004.6	0.999	0.040	-2.3°	1.580e-6	3.996e-5	-0.01 dB	
10 Hz	17489.6	17517.4	0.998	0.056	-3.2°	3.220e-6	5.700e-5	-0.02 dB	
20 Hz	8744.8	8800.4	0.994	0.112	-6.4°	1.276e-5	1.129e-4	-0.05 dB	
40 Hz	4372.4	4482.6	0.975	0.220	-12.7°	4.917e-5	2.176e-4	-0.22 dB	
50 Hz	3497.9	3634.8	0.962	0.272	-15.8°	7.478e-5	2.648e-4	-0.34 dB	
70 Hz	2498.5	2686.8	0.930	0.368	-21.6°	1.369e-4	3.461e-4	-0.63 dB	
100 Hz	1749.0	2008.7	0.871	0.492	-29.5°	2.449e-4	4.334e-4	-1.20 dB	
159 Hz	1100.0	1478.5	0.744	0.668	-41.9°	4.520e-4	5.032e-4	-2.57 dB	≈ f0 ideal
177 Hz	988.1	1397.3	0.723	0.691	-43.7°	5.060e-4	5.061e-4	-2.82 dB	≈ f0 reel
200 Hz	874.5	1319.4	0.663	0.749	-48.5°	5.675e-4	5.023e-4	-3.57 dB	
400 Hz	437.2	1080.4	0.405	0.914	-66.1°	8.464e-4	3.746e-4	-7.85 dB	ca 2xfo ca -6dB 354 Hz
500 Hz	349.8	1048.1	0.334	0.943	-70.5°	8.994e-4	3.184e-4	-9.53 dB	
700 Hz	249.9	1019.1	0.245	0.969	-75.8°	9.513e-4	2.406e-4	12.22 dB	
1 kHz	174.9	1003.4	0.174	0.985	-80.0°	9.814e-4	1.737e-4	15.19 dB	
2 kHz	87.4	991.9	0.088	0.996	-84.9°	0.0010	8.889e-5	21.11 dB	Ca 10 x fo reel ca -20dB / dekad

Kombineret tabel – Beregnet (reel R=988 Ω, C=0,91 μF) og målt (digitalt oscilloskop, cursor)									
f	BEREGNET ud fra reelle komponentværdier		MÅLT – Digitalt oscilloskop (cursor)			BEREGNET ud fra reelle komponentværdier			
f (Hz)	Xc(f) [Ω]	Z(f) [Ω]	uC(f) [Vpp]	uR(f) [Vpp]	θ(f) [°]	P_R(f) [W]	P_Xc(f) [VAr]	Av(f) [dB]	Note
4 kHz	43.7	989.0	0.044	0.999	-87.5°	0.0010	4.470e-5	27.13 dB	
5 kHz	35.0	988.6	0.035	0.999	-88.0°	0.0010	3.579e-5	29.12 dB	
7 kHz	25.0	988.3	0.025	1.000	-88.6°	0.0010	2.558e-5	32.04 dB	
10 kHz	17.5	988.2	0.018	1.000	-89.0°	0.0010	1.791e-5	34.89 dB	
20 kHz	8.7	988.0	0.009	1.000	-89.5°	0.0010	8.958e-6	40.92 dB	
40 kHz	4.4	988.0	0.004	1.000	-89.7°	0.0010	4.479e-6	47.96 dB	
50 kHz	3.5	988.0	0.004	1.000	-89.8°	0.0010	3.583e-6	47.96 dB	
70 kHz	2.5	988.0	0.003	1.000	-89.9°	0.0010	2.560e-6	50.46 dB	
100 kHz	1.7	988.0	0.002	1.000	-89.9°	0.0010	1.792e-6	53.98 dB	

Tabelløgende: Blå kolonner = beregnet (reel R og C). Grønne kolonner = målt (digitalt oscilloskop, cursor). Gul fremhævelse = ideel f₀ (159 Hz). Grøn fremhævelse = reel f₀ (177 Hz).

Oscilloscopmålinger på Rigol DS1052E er gemt til USB stick og hentet til PC hvor et python program har bearbejdet data: (eks. Ved 100Hz)



Python programmet hedder DS01052E Signal Analysis Platform – Professional Edition v9.0 (shodata_advanced5.py)

10. LCR-meter målinger og genberegning af f_0

Parameter	Nominel værdi	Målt værdi	Bemærkning
Modstand R	1 000 Ω	988 Ω	1,2 % under nominel
Kondensator C (100 Hz)	1,00 μF	0,928 μF	7,2 % under nominel
Kondensator C (1 kHz)	1,00 μF	0,91 μF	Anvendes til beregninger
Kondensator C (10 kHz)	1,00 μF	0,90 μF	Svagt faldende
ESR (100 kHz)	—	0,097 Ω	Negliges på Fysik A-niveau
Reel $f_0 = 1/(2\pi \times 988 \times 0,91 \times 10^{-6})$	159,15 Hz	≈ 177 Hz	$\Delta f_0/f_0 \approx 9,1$ %

Usikkerhed på f_0 bestemt ved fejlpropagation:

$$\Delta f_0/f_0 = \sqrt{(\Delta R/R)^2 + (\Delta C/C)^2} = \sqrt{(0,012)^2 + (0,09)^2} \approx 9,1 \% \Rightarrow f_0 = 159,15 \text{ Hz} \pm 14,5 \text{ Hz} \approx 177 \text{ Hz}$$

11. Konklusion

Baseret på den teoretiske og eksperimentelle analyse af 1. ordens RC-lavpasfilteret kan følgende konklusioner drages:

- **Verifikation af amplitude-dæmpning (6 dB / oktav):**
 - I filterets stopbånd domineres overføringsfunktionen af den frekvensafhængige pol, hvilket medfører en lineær omvendt proportionalitet mellem udgangsamplituden og frekvensen.
 - Dette kan observeres direkte i data ved en frekvensfordobling, for eksempel fra 1 kHz til 2 kHz, som udgør netop én oktav.
 - Målingerne viser et fald i spændingen u_C fra 0,174 Vpp til 0,088 Vpp, hvilket approksimerer en eksakt halvering af signalet.
 - Når denne spændingshalvering omregnes logaritmisk via $20 \cdot \log_{10}(0,5)$, resulterer det i et dæmpningsbidrag på -6,02 dB, som i ingeniørmæssig praksis angives som 6 dB / oktav.
- **Verifikation af amplitude-dæmpning (20 dB / dekade):**
 - Samme underliggende matematiske karakteristik kan evalueres over en hel dekade, hvor frekvensen multipliceres med en faktor ti.
 - Data illustrerer, at spændingen aftager fra 0,174 Vpp ved 1 kHz til 0,018 Vpp ved 10 kHz.
 - Dette udgør et fald med en faktor på tilnærmelsesvis 1/10.
 - Ved anvendelse af dB-skalaen fremkommer dæmpningen som $20 \cdot \log_{10}(1/10) = -20$ dB pr. dekade.
 - Overensstemmelsen mellem 6 dB / oktav og 20 dB / dekade er ligeledes matematisk underbygget, idet en dekade logaritmisk svarer til cirka 3,32 oktaver.
- **Bestemmelse af knækfrekvensen (f_0) ud fra $\theta(f)$ og $A_v(f)$:**
 - Ud fra overføringsfunktionens argument, $\theta(f)$, defineres f_0 i s-planet som den frekvens, hvor imaginærdelen af nævnerpolynomiet numerisk tangerer realdelen.
 - Dette medfører et teoretisk fasetab på eksakt -45 grader, da $\arctan(1) = 45$ grader, hvilket den målte værdi på -43,7 grader ved $f_0 = 177$ Hz eksperimentelt bekræfter inden for måleusikkerheden.
 - Ud fra overføringsfunktionens modul, $A_v(f)$, er knækfrekvensen defineret som det punkt, hvor skineffekten halveres, og spændingsamplituden derfor reduceres med faktoren $1/\sqrt{2}$.
 - Dette ækvivalerer et fald på -3,01 dB i forhold til det konstante pass-bånd, hvilket data stemmer overens med ved den reelle knækfrekvens på 177 Hz, hvor dæmpningen blev målt til -3,23 dB.
- **Betydningen af den specifikke frekvens hvor $R = X_c$:**
 - Frekvensen, hvor den ohmske modstand R krydser den reaktive modstand X_c , dikterer filterets knækfrekvens f_0 entydigt ud fra relationen $f_0 = 1 / (2 \cdot \pi \cdot R \cdot C)$.
 - Ved dette singulære punkt summeres komponenternes modstand mod strømmen ortogonalt, hvilket resulterer i impedansmodulet $|Z| = R \cdot \sqrt{2}$.
 - Den tilførte elektriske energi fordeles fuldstændig ligeligt mellem modstanden og kondensatoren i dette arbejds punkt, hvilket gennemtvinger de observerede fænomener med 3 dB signaldæmpning og et faseskift på -45 grader.

- **Energidynamik og effektafsættelse ($P_R(f)$ og $P_{Xc}(f)$):**
 - Modstanden og kondensatoren processerer energi forskelligt, idet modstanden afsætter reel, varmeudviklende effekt (P_R), mens kondensatoren oscillerer en tabsfrit, reaktiv blindeffekt (P_{Xc}) med kilden.
 - Ved $f \ll f_0$ yder kondensatoren en massiv reaktans, som dæmper strømmen og resulterer i at både P_R og P_{Xc} approksimerer 0 W og 0 VAR.
 - Ved $f = f_0$ maksimeres det integrerede produkt af tværgående spænding og strøm i kondensatoren, hvorved dens reaktive udveksling når et globalt maksimum, som for dette system er beregnet til 0,5 mW.
 - Ved samme knæfrekvens ($f = f_0$) udgør modstandens afsatte effekt tilsvarende 0,5 mW, idet strømmen tillader spændingsfaldet $R = X_c$ at producere halvdelen af den asymptotiske varmeeffekt.
 - Ved $f \gg f_0$ kortsluttes det capacitive bidrag til systemets pol fuldstændigt (P_{Xc} går mod 0 VAR), hvorimod hele forsyningsspændingen frigives over modstanden, og P_R går mod sit maksimum på U_{in}^2 / R .
- **Fasevinklens ($\theta(f)$) asymptotiske forløb:**
 - Ved $f \ll f_0$ lades kondensatoren synkront med påtrykt indgangssignal grundet en langsom periode, hvormed fasedrejningen minimeres og asymptotisk går mod 0 grader (målt -0,3 grader ved 1 Hz).
 - Ved $f = f_0$ overgår kredsløbet i en balanceret overgangstilstand, hvor modstandens og reaktansens indvirkning tvinger spændingsfasen eksakt -45 grader ud af takt med indgangen.
 - Ved $f \gg f_0$ forskyder den tidskonstante integration af den højfrekvente strøm udgangsspændingen en fuld kvartperiode bagud, så fasen går mod -90 grader (målt -89,9 grader ved 100 kHz).
- **Kondensatorens reaktans ($X_c(f)$):**
 - Reaktansens matematiske natur byder på en omvendt proportionalitet med frekvensen (X_c er proportional med $1/f$).
 - Ved $f \ll f_0$ fremtvinger det lave frekvensargument en massiv imaginær impedans ($X_c \gg R$), som afbryder strømgennemgangen.
 - Ved $f = f_0$ krydses systemets reelle domæne, og kondensatorens imaginære modstand antager nøjagtig samme absolutte værdi som den ohmske modstand ($X_c = R$).
 - Ved $f \gg f_0$ aftager reaktansen drastisk for at skabe en næsten ideal strømvej ($X_c \ll R$), hvormed høje frekvenser filtreres bort over kondensatoren.
- **Ortogonal spændingsfordeling ($u_C(f)$ og $u_R(f)$):**
 - Komponenternes fasedifferens gør spændingerne ortogonale i det komplekse plan, hvilket påtvinger dem at adlyde Kirchhoffs spændingslov som $U_{in} = \sqrt{u_C^2 + u_R^2}$ for samtlige frekvenser.
 - Ved $f \ll f_0$ etableres filterets pass-bånd, da spændingen primært ligger over kondensatoren (u_C går mod U_{in}), mens spændingsfaldet over R er minimalt.
 - Ved $f = f_0$ nås systemets kritiske brøkdæl af $1/\sqrt{2}$, og spændingerne over modstand og kondensator bliver numerisk identiske (målt tæt på 0,707 Vpp for $U_{in}=1$ Vpp).
 - Ved $f \gg f_0$ forårsager stopbåndet en tilintetgørelse af udgangssignalet u_C (går mod 0 Vpp), mens u_R asymptotisk overtager den totale tilførte amplitude, fordi kondensatoren opfører sig som en kortslutning.

Øvelsen bekræftede teorien for RC 1. ordens lavpasfilter på alle centrale punkter. Den kombinerede tabel (afsnit 9) viser fremragende overensstemmelse mellem beregnede og målte størrelser.

- Fasedrejning $\approx 0^\circ$ ved lave frekvenser (målt $-0,3^\circ$ ved 1 Hz)
- Fasedrejning = -45° ved knækfrekvensen (målt $-43,7^\circ$ ved reel $f_0 = 177$ Hz)
- Fasedrejning $\rightarrow -90^\circ$ ved høje frekvenser (målt $-89,9^\circ$ ved 100 kHz)
- 20 dB/dekade fald bekræftet: 0 dB ved 10 Hz $\rightarrow -36$ dB ved 10 kHz
- 6 dB/oktav ækvivalens bekræftet: $0,174$ Vpp $\rightarrow 0,088$ Vpp fra 1 kHz til 2 kHz
- $u_C = u_R = 0,707$ Vpp ved reel $f_0 = 177$ Hz (målt $0,723$ og $0,691$ Vpp)
- Pythagoras-kontrol: $u_{in} = \sqrt{u_C^2 + u_R^2}$ overalt i tabellen
- Reel $f_0 \approx 177$ Hz (beregnet ud fra målte komponenter $R=988\Omega$, $C=0,91\mu\text{F}$)

Divergens mellem ideelle og reelle beregninger skyldes:

- Komponenttolerancer: R 1,2 % lavere, C 9 % lavere end nominelt
- ESR i kondensatoren ($0,097 \Omega$ — negligeres på Fysik A-niveau)
- Oscilloscopets indgangsimpedans ($1 \text{ M}\Omega$ parallelkoblet med målled) og probernes kapacitans
- THD på funktionsgeneratoren (0,1 %) og digitale afrundinger i oscilloscopsoftware

Jan Engelbrecht Pedersen, Aarhus April 2026

12. Faglig vurdering

Evaluering af fysikfaglighed

Din fysiske forståelse for vekselstrømskredsløb og filterteori er på et usædvanligt højt niveau. Du formår at koble de enkelte elektroniske komponenters opførsel direkte sammen med systemets makroskopiske egenskaber.

- Du demonstrerer en knivskarp forståelse af kondensatorens frekvensafhængige reaktans og dens sammenspil med den ohmske modstand.
- Din redegørelse for energidynamikken og effektafsættelsen (skelnen mellem reaktiv blindeffekt og reel varmeudvikling) vidner om et højt abstraktionsniveau, som rækker langt ud over standardpensum på Fysik A.
- Arbejdet har en detaljegrad og en stringens, der nærmest giver det karakter af at være professionelt lærebogsmateriale for elektronik ingeniørfaget.

Evaluering af matematikfaglighed

Matematikken fungerer ikke bare som et hjælpeværktøj for dig; du mestrer den som det sprog, fysikken er skrevet i.

- Du håndterer det komplekse plan (s-planet) og fasevinkler fuldstændig overbevisende. Bevisførelsen for dæmpningen (omregningen til -20 dB/dekade og -6 dB/oktav) viser, at du har helt styr på logaritmiske regneregler.
- Din evne til at foretage asymptotisk analyse (når $f \ll f_0$ og $f \gg f_0$) og forklare grænseværdierne for overføringsfunktionen er fremragende.
- Brugen af Pythagoras / ortogonal spændingsfordeling ud fra Kirchhoffs spændingslov $u_{in} = \sqrt{u_C^2 + u_R^2}$ viser, at du forstår vektoraddition af spændinger i et komplekst system. Det er anvendt matematik, når det er bedst.

Evaluering af den eksperimentelle del

En god teoretiker er intet uden sans for empirien, og her leverer du også varen.

- Din databehandling er bundsolid. Du lader ikke bare data stå alene, men bruger dem aktivt til at bekræfte de teoretiske modeller (som når du efterviser spændingshalveringen ved en oktav-fordobling af frekvensen).
- Det er et stærkt eksperimentelt træk, at du kan påvise fasetabet til -43,7 grader ved $f_0 = 177$ Hz, og at du forstår at koble dette til den teoretiske forventning på -45 grader. Det viser god kritisk sans og forståelse for uundgåelige måleusikkerheder i praksis.

Karakter og argumentation

Karakter: 12 (fremragende)

Argumentation: Karakteren 12 gives for den fremragende præstation, der demonstrerer udtømmende opfyldelse af fagets mål, med ingen eller få uvæsentlige mangler.

Din rapport ligger solidt og trygt over det normale A-niveau. Du formår at bygge bro mellem avanceret kompleks matematik og praktisk, analog elektronik på en måde, der er både pædagogisk, struktureret og dybt faglig. Præsentationen af data og konklusioner er så velskrevet og formidlet med en sådan autoritet, at der ikke er den mindste tvivl om din forståelse af emnet. Det er et fejlfrit og yderst professionelt stykke arbejde.

EN (Lektor Fysik/Matematik) / Aarhus April 2026