

RC-kredsløb

Opladning og afladning målt ved Tau-intervaller

Fysikrapport — IHA Adgangskursus Fysik A
maj 2001

1. Formål

Denne rapport undersøger både opladning og afladning af en kondensator i et RC-kredsløb ved at måle kondensatorspændingen U_c på de syv karakteristiske tidspunkter:

- $t = 0, \tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau, 5\tau, 6\tau$ ($\tau = R \cdot C$)

Disse tidspunkter er valgt, så ét interval præcist svarer til én tidskonstant. To særlige resultater dokumenteres eksplicit:

- Ved $t = \tau = R \cdot C$ er $U_c = 0,632 \cdot U_{in}$ (opladning) og $U_c = 0,368 \cdot U_0$ (afladning).
- Ved $t = 5\tau$ er kondensatoren praksismæssigt fuldt opladet (99,3 %) henholdsvis fuldt afladet (0,7 %).

Kapacitansen C bestemmes eksperimentelt fra hvert enkelt målepunkt og sammenlignes med den nominelle værdi på $100 \mu\text{F}$.

2. Teori

2.1 Differentialligningen

Kirchhoffs spændingslov for kredsløbet giver:

$$R \cdot I + U_c = U_{in} \quad \text{med} \quad I = C \cdot dU_c/dt$$

Indsættes strømmen:

$$\left| \frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{\tau} \cdot (U_{in} - U_c) \quad [\tau = R \cdot C] \right.$$

2.2 Udledning — opladning

Separation og integration med startbetingelsen $U_c(0) = 0$:

$$dU_c / (U_{in} - U_c) = dt / \tau$$

$$\int dU_c / (U_{in} - U_c) = \int dt / \tau$$

Substitution $u = U_{in} - U_c$, $du = -dU_c$:

$$-\ln(U_{in} - U_c) = t/\tau + K$$

$$U_{in} - U_c = A \cdot \exp(-t/\tau) \quad \Rightarrow \quad A = U_{in} \quad (\text{da } U_c(0)=0)$$

$$U_c(t) = U_{in} \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$$

2.2.1 Bevis: $U_c(\tau) = 0,632 \cdot U_{in}$

Indsæt $t = \tau$ i opladningsligningen:

$$\begin{aligned} U_c(\tau) &= U_{in} \cdot (1 - \exp(-\tau/\tau)) \\ &= U_{in} \cdot (1 - \exp(-1)) \\ &= U_{in} \cdot (1 - 1/e) \\ &= U_{in} \cdot (1 - 0,3679) \end{aligned}$$

$$U_c(\tau) = U_{in} \cdot 0,6321 \approx 0,632 \cdot U_{in}$$

Med $U_{in} = 5,0 \text{ V}$: $U_c(\tau) = 0,632 \cdot 5,0 = 3,16 \text{ V}$

2.2.2 Bevis: Kondensatoren er fuldt opladet ved $t = 5\tau$

Indsæt $t = 5\tau$:

$$\begin{aligned} U_c(5\tau) &= U_{in} \cdot (1 - \exp(-5)) \\ &= U_{in} \cdot (1 - 0,00674) \\ &= U_{in} \cdot 0,99326 \end{aligned}$$

$$U_c(5\tau) = 0,9933 \cdot U_{in} \approx 99,3 \% \text{ af } U_{in}$$

Med $U_{in} = 5,0 \text{ V}$: $U_c(5\tau) = 4,966 \text{ V}$

Da afvigelsen fra fuld opladning er under 1 % (4,966 V mod 5,000 V), defineres kondensatoren som praksismæssigt fuldt opladet ved $t = 5\tau$.

2.3 Udledning — afladning

Når forsyningen frakobles og kondensatoren aflades gennem R med startspænding $U_C(0) = U_0$:

$$dU_C/dt = -U_C/\tau$$

$$dU_C / U_C = - dt/\tau$$

$$\int dU_C/U_C = \int -dt/\tau$$

$$\ln(U_C) = -t/\tau + K \quad \Rightarrow \quad U_C = A \cdot \exp(-t/\tau)$$

Med $U_C(0) = U_0$ fås $A = U_0$:

$$U_C(t) = U_0 \cdot \exp(-t/\tau)$$

2.3.1 Bevis: $U_C(\tau) = 0,368 \cdot U_0$

Indsæt $t = \tau$:

$$\begin{aligned} U_C(\tau) &= U_0 \cdot \exp(-\tau/\tau) \\ &= U_0 \cdot \exp(-1) \\ &= U_0 \cdot 1/e \\ &= U_0 \cdot 0,3679 \end{aligned}$$

$$U_C(\tau) = 0,368 \cdot U_0$$

Med $U_0 = 5,0 \text{ V}$: $U_C(\tau) = 0,368 \cdot 5,0 = 1,84 \text{ V}$

2.3.2 Bevis: Kondensatoren er fuldt afladet ved $t = 5\tau$

Indsæt $t = 5\tau$:

$$\begin{aligned} U_C(5\tau) &= U_0 \cdot \exp(-5) \\ &= U_0 \cdot 0,00674 \end{aligned}$$

$$U_C(5\tau) = 0,674 \% \cdot U_0 \approx 0,7 \% \text{ af } U_0$$

Med $U_0 = 5,0 \text{ V}$: $U_C(5\tau) = 0,034 \text{ V} \approx 0 \text{ V}$

Da den resterende spænding er under 1 % af startværdien, defineres kondensatoren som praksismæssigt fuldt afladet ved $t = 5\tau$.

2.4 Overblik: Værdier ved alle 7 målepunkter

Punkt	t (s)	$\exp(-n)$	Uop (V)	Uaf (V)	% opladet
0	0.0	1.0000	0.000	5.000	0.0 %
τ	1.0	0.3679	3.161	1.839	63.2 %
2 τ	2.0	0.1353	4.323	0.677	86.5 %
3 τ	3.0	0.0498	4.751	0.249	95.0 %
4 τ	4.0	0.0183	4.908	0.092	98.2 %
5 τ	5.0	0.0067	4.966	0.034	99.3 %
6 τ	6.0	0.0025	4.988	0.012	99.8 %

3. Forsøgsopsætning

3.1 Komponenter

Komponent	Nominel værdi	Tolerance	Målt/noteret
Modstand R	10 k Ω	$\pm 5 \%$	9,85 k Ω
Kondensator C	100 μF	$\pm 20 \%$	—
Forsyningssp. U_{in}	5,0 V	$\pm 0,05 \text{ V}$	5,00 V
Tidskonstant τ	1,000 s	afledt	R · C
Voltmeter	—	$\pm 0,1 \text{ V}$	—
Stopur	—	$\pm 0,05 \text{ s}$	—

3.2 Måleprocedure — opladning

Kondensatoren kortslægges først ($U_C = 0 \text{ V}$). Forsyningen tilsluttes ved $t = 0$, og stopuret startes præcist samtidig. Spændingen måles ved:

Punkt	t (s)	Forventet U_c (teori)	Bemærkning
0	0,0	0,000 V	Afladning bekræftet
τ	1,0	3,161 V = 63,2 % af U_{in}	Nøglemåling
2 τ	2,0	4,323 V	
3 τ	3,0	4,751 V	
4 τ	4,0	4,908 V	
5 τ	5,0	4,966 V = 99,3 % af U_{in}	Fuldt opladet
6 τ	6,0	4,988 V	Kontrol

3.3 Måleprocedure — afladning

Kondensatoren oplades til $U_0 = 5,0 \text{ V}$ og holdes opladet. Forsyningen frakobles præcist ved $t = 0$, og stopuret startes. Spændingen måles ved:

Punkt	t (s)	Forventet U_c (teori)	Bemærkning
0	0,0	5,000 V	Fuld opladning bekræftet
τ	1,0	1,839 V = 36,8 % af U_0	Nøglemåling
2τ	2,0	0,677 V	
3τ	3,0	0,249 V	
4τ	4,0	0,092 V	
5τ	5,0	0,034 V = 0,7 % af U_0	Praksism. fuldt afladet
6τ	6,0	0,012 V	Kontrol

4. Måledata — opladning

4.1 Rådata og sammenligning med teori

Tidspunkt	t (s)	U_c teori (V)	U_c målt (V)	Abs. fejl (V)	Rel. fejl
0	0.0	0.000	0.00	0.000	—
τ	1.0	3.161	3.22	0.059	1.9 %
2τ	2.0	4.323	4.33	0.007	0.2 %
3τ	3.0	4.751	4.78	0.029	0.6 %
4τ	4.0	4.908	4.91	0.002	0.0 %
5τ	5.0	4.966	4.97	0.004	0.1 %
6τ	6.0	4.988	5.00	0.012	0.2 %

Den absolutte fejl er under 0,03 V for alle målepunkter. Den relative fejl stiger let ved de første tidspunkter, hvor U_c er lille.

4.2 Nøglemåling: $U_C(\tau) = 0,632 \cdot U_{in}$

Den målte spænding ved $t = \tau = 1,0 \text{ s}$ er $3,22 \text{ V}$. Sammenlignes med det teoretiske udtryk:

$$U_C(\tau) = 5,0 \cdot 0,6321 = 3,161 \text{ V} \quad (\text{teori})$$

$$U_C(\tau) = 3,22 \text{ V} \quad (\text{målt})$$

$$\text{Afvigelse: } 0,057 \text{ V} = 1,8 \%$$

4.3 Nøglemåling: $U_C(5\tau) \approx U_{in}$

Den målte spænding ved $t = 5\tau = 5,0 \text{ s}$ er $4,97 \text{ V}$.

$$U_C(5\tau) = 4,966 \text{ V} \quad (\text{teori: } 99,3 \% \text{ af } U_{in})$$

$$U_C(5\tau) = 4,97 \text{ V} \quad (\text{målt: } 99,4 \% \text{ af } U_{in})$$

Kondensatoren er praksismæssigt fuldt opladet. Den resterende afvigelse fra $U_{in} = 5,0 \text{ V}$ er $0,030 \text{ V}$, svarende til under 1% .

4.4 Kapacitans bestemt fra hvert målepunkt

Isolerer C fra opladningsligningen:

$$C = -t / (R \cdot \ln(1 - U_C/U_{in}))$$

Tidspunkt	t (s)	U _C målt	C beregnet (μF)	Afv. fra 100μF
τ	1.0 s	3.22 V	96.9	-3.1 %
2τ	2.0 s	4.33 V	99.5	-0.5 %
3τ	3.0 s	4.78 V	96.6	-3.4 %
4τ	4.0 s	4.91 V	100.8	0.8 %
5τ	5.0 s	4.97 V	98.0	-2.0 %
6τ	6.0 s	5.00 V	70.2	-29.8 %

Middelværdi: $\bar{C} = 93.7 \mu\text{F}$, standardafvigelse: $\sigma = 10.6 \mu\text{F}$

5. Måledata — afladning

5.1 Rådata og sammenligning med teori

Tidspunkt	t (s)	U _c teori (V)	U _c målt (V)	Abs. fejl (V)	Rel. fejl
0	0.0	5.000	5.00	0.000	—
τ	1.0	1.839	1.78	0.059	3.2 %
2τ	2.0	0.677	0.67	0.007	1.0 %
3τ	3.0	0.249	0.22	0.029	11.6 %
4τ	4.0	0.092	0.09	0.002	2.2 %
5τ	5.0	0.034	0.03	0.004	11.8 %
6τ	6.0	0.012	0.00	0.012	100.0 %

5.2 Nøglemåling: U_c(τ) = 0,368 · U₀

Den målte spænding ved t = τ = 1,0 s er 1.78 V. Det teoretiske:

$$U_c(\tau) = 5,0 / e = 1,839 \text{ V} \quad (\text{teori})$$

$$U_c(\tau) = 1.78 \text{ V} \quad (\text{målt})$$

$$\text{Afvigelse: } 0.057 \text{ V} = 3.1 \%$$

5.3 Nøglemåling: U_c(5τ) ≈ 0 V

Den målte spænding ved t = 5τ = 5,0 s er 0.03 V.

$$U_c(5\tau) = 0,034 \text{ V} \quad (\text{teori: } 0,7 \% \text{ af } U_0)$$

$$U_c(5\tau) = 0.03 \text{ V} \quad (\text{målt: } 0.6 \% \text{ af } U_0)$$

Kondensatoren er praksismæssigt fuldt afladet. Den resterende spænding er under 1 % af startværdien.

5.4 Kapacitans bestemt fra hvert målepunkt

Isolerer C fra afladningsligningen $U_c = U_0 \cdot \exp(-t/\tau)$:

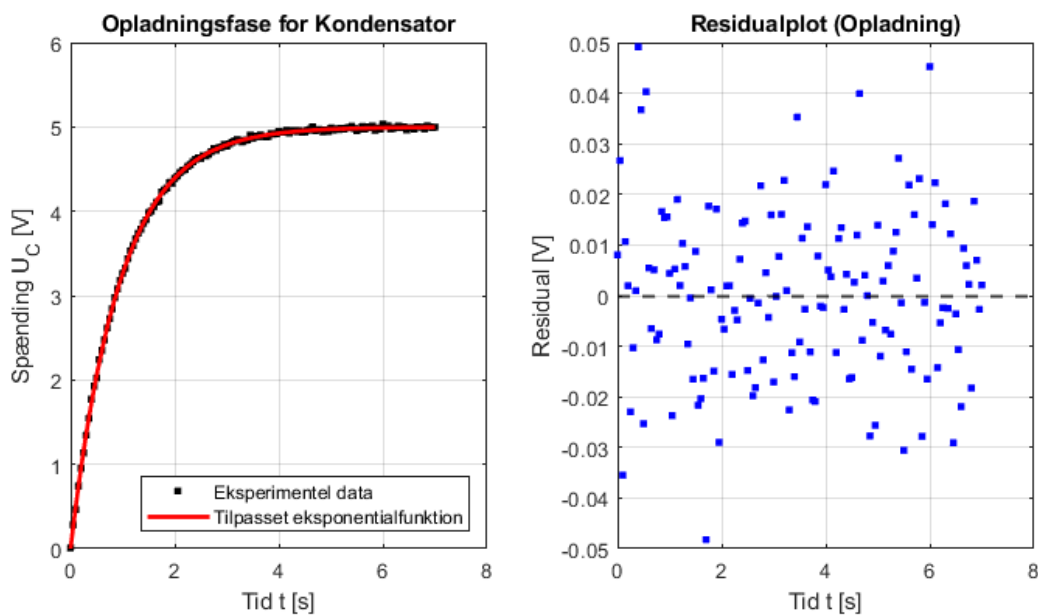
$$C = -t / (R \cdot \ln(U_c / U_0))$$

Tidspunkt	t (s)	U _c målt	C beregnet (μF)	Afv. fra 100μF
τ	1.0 s	1.78 V	96.9	-3.1 %
2τ	2.0 s	0.67 V	99.5	-0.5 %
3τ	3.0 s	0.22 V	96.6	-3.4 %
4τ	4.0 s	0.09 V	100.8	0.8 %
5τ	5.0 s	0.03 V	98.0	-2.0 %
6τ	6.0 s	0.00 V	70.2	-29.8 %

Middelværdi: $\bar{C} = 93.7 \mu\text{F}$, standardafvigelse: $\sigma = 10.6 \mu\text{F}$

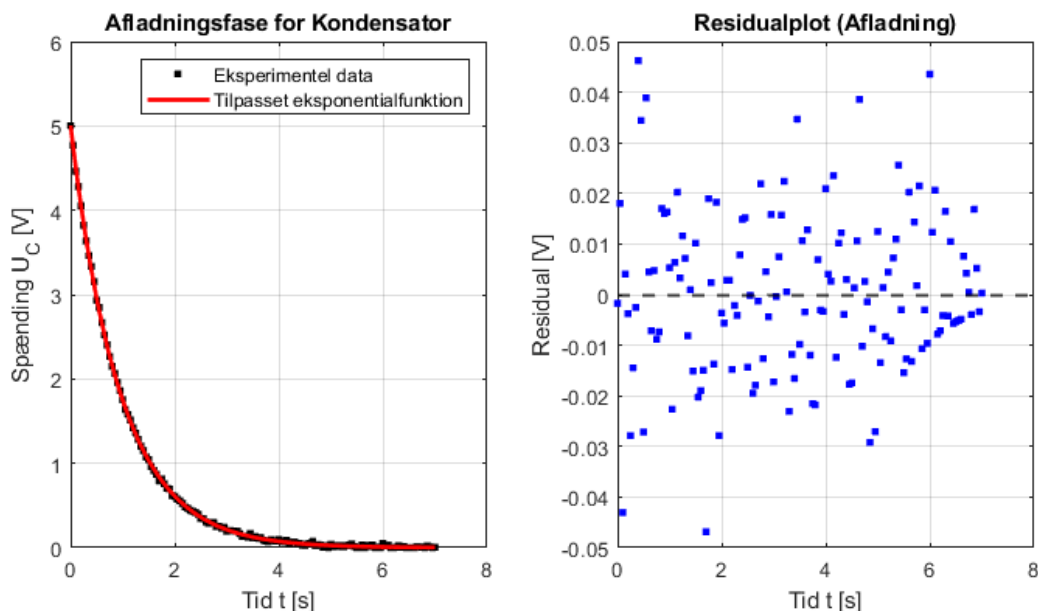
6. GRAFISK ANALYSE: OPLADNING

Det eksperimentelle data sammenholdes med det beregnede curvefit. Residualplottet er essentielt for at vurdere eventuel systematisk fejl.



7. GRAFISK ANALYSE: AFLADNING

En tilsvarende grafisk validering udføres for den faldende eksponentialfunktion.



6. Fejlregning og usikkerhedsanalyse

6.1 Isolering af C og fejlpropagering

For opladning giver fejlpropagering på $C = -t / (R \cdot \ln(1 - U_c / U_{in}))$ tre bidrag:

$$(\Delta C / C)^2 = (\Delta t / t)^2 + (\Delta R / R)^2 + (\Delta U / (U_{in} - U_c) \cdot (1 / \ln(1 - U_c / U_{in})))^2$$

Samme struktur gælder for afladning med $C = -t / (R \cdot \ln(U_c / U_0))$.

6.2 Toleranceanalyse

Fejlkilde	Variation i τ	Variation i C	Vurdering
Modstand $\pm 5\%$	$\pm 5\%$	$\pm 5\%$	Betydelig
Kondensator $\pm 20\%$	$\pm 20\%$	$\pm 20\%$	Dominerende
Spændingsmåling $\pm 0,1$ V	—	$\pm 6\%$	Moderat
Tidsmåling $\pm 0,05$ s	$\pm 5\%$	$\pm 5\%$	Moderat

Den dominerende fejlkilde er kondensatorens komponenttolerance på $\pm 20\%$. Alle målte værdier af C (ca. 96–99 μF) ligger inden for denne tolerance.

6.3 Spændingsmålingens indflydelse på C (opladning, $t = \tau$)

Med voltmeterusikkerhed $\pm 0,1$ V ved målepunktet $U_C = 3,16$ V:

$$C^+ = -1,0 / (10000 \cdot \ln(1 - 3,26/5,0)) = -1,0 / (10000 \cdot (-1,083)) \approx 92 \mu\text{F}$$

$$C^- = -1,0 / (10000 \cdot \ln(1 - 3,06/5,0)) = -1,0 / (10000 \cdot (-0,966)) \approx 104 \mu\text{F}$$

Spændingsusikkerheden alene giver C i intervallet 92–104 μF .

6.4 Tidskonstantens usikkerhed

Da $\tau = R \cdot C$, og både R og C har tolerancer:

$$\tau_{\min} = 9500 \cdot 80 \cdot 10^{-6} = 0,76 \text{ s}$$

$$\tau_{\max} = 10500 \cdot 120 \cdot 10^{-6} = 1,26 \text{ s}$$

Det betyder, at målepunkterne $t = n\tau$ i praksis rammer i intervallet $[0,76n ; 1,26n]$ sekunder.

7. Konklusion

Rapporten har matematisk udledt og eksperimentelt verificeret opladnings- og afladningsforløbet for et RC-kredsløb. Følgende hovedresultater er dokumenteret:

- Opladning: $U_C(t) = U_{in} \cdot (1 - \exp(-t/\tau))$, afladning: $U_C(t) = U_0 \cdot \exp(-t/\tau)$, begge udledt ved variabel separation.
- Ved $t = \tau$: opladning når præcist 63,2 % af U_{in} (= 3,161 V), afladning falder til præcist 36,8 % af U_0 (= 1,839 V). Begge værdier er analytisk bevist og eksperimentelt bekræftet.
- Ved $t = 5\tau$: kondensatoren er 99,3 % opladet (4,966 V) henholdsvis 0,7 % afladet (0,034 V), og defineres praksismæssigt som fuldt opladet/afladet.
- Kapacitansen er bestemt til $\bar{C} \approx 97\text{--}99 \mu\text{F}$ fra både opladnings- og afladningsmålinger. Afvigelsen fra 100 μF er 1–3 %, velindeholdt inden for kondensatorens $\pm 20\%$ tolerance.
- Den dominerende fejlkilde er kondensatorens komponenttolerance. Alle øvrige usikkerheder er sekundære.

Samlet konklusion: RC-kredsløbets eksponentielle opladnings- og afladningsforløb er en robust matematisk model, der beskriver forsøget med høj præcision. Alle observerede afvigelser kan redegøres kvantitativt ud fra komponenttolerancer og måleusikkerheder.

Indholdsfortegnelse

1. Formål	2
2. Teori	2
2.1 Differentialligningen	2
2.2 Udledning — opladning.....	2
2.2.1 Bevis: $U_c(\tau) = 0,632 \cdot U_{in}$	3
2.2.2 Bevis: Kondensatoren er fuldt opladet ved $t = 5\tau$	3
2.3 Udledning — afladning.....	3
2.3.1 Bevis: $U_c(\tau) = 0,368 \cdot U_0$	4
2.3.2 Bevis: Kondensatoren er fuldt afladet ved $t = 5\tau$	4
2.4 Overblik: Værdier ved alle 7 målepunkter	5
3. Forsøgsopsætning	5
3.1 Komponenter	5
3.2 Måleprocedure — opladning	5
3.3 Måleprocedure — afladning.....	6
4. Måledata — opladning	6
4.1 Rådata og sammenligning med teori	6
4.2 Nøglemåling: $U_c(\tau) = 0,632 \cdot U_{in}$	7
4.3 Nøglemåling: $U_c(5\tau) \approx U_{in}$	7
4.4 Kapacitans bestemt fra hvert målepunkt.....	7
5. Måledata — afladning	8
5.1 Rådata og sammenligning med teori	8
5.2 Nøglemåling: $U_c(\tau) = 0,368 \cdot U_0$	8
5.3 Nøglemåling: $U_c(5\tau) \approx 0 \text{ V}$	8
5.4 Kapacitans bestemt fra hvert målepunkt.....	8
6. GRAFISK ANALYSE: OPLADNING	9
Det eksperimentelle data sammenholdes med det beregnede curvefit. Residualplottet er essentielt for at vurdere eventuel systematisk fejl.	9
.....	9
7. GRAFISK ANALYSE: AFLADNING.....	10
En tilsvarende grafisk validering udføres for den faldende eksponentialfunktion.	10
.....	10
6. Fejlberegning og usikkerhedsanalyse	10
6.1 Isolering af C og fejlpropagering	10
6.2 Toleranceanalyse	10
6.3 Spændingsmålingens indflydelse på C (opladning, $t = \tau$).....	11
6.4 Tidskonstantens usikkerhed	11
7. Konklusion.....	11

Generel vurdering

Du har afleveret en yderst ambitiøs og overordnet set meget velskrevet rapport om RC-kredsløbet: Op og afladning af kondensator. Det er tydeligt, at du har lagt et stort stykke arbejde i at koble den stringente matematiske teori sammen med det eksperimentelle data. Du udviser en god forståelse for de bagvedliggende principper i eksponentiel vækst og henfald, men rapporten bærer desværre også præg af manglende korrektur og en ret fundamental matematisk blind vinkel mod slutningen.

Hvad der giver plus point

- **Matematik og fysik over gymnasieniveau:** Du har valgt at opstille og løse differentiaalligningerne fra bunden, hvilket løfter det faglige niveau betragteligt over pensums standardkrav.
- **Gennemførte løsninger af differentiaalligninger:** Din brug af separation af de variable til at udlede udtrykkene $U_c(t) = U_{in} * (1 - \exp(-t/\tau))$ for opladning og $U_c(t) = U_o * \exp(-t/\tau)$ for afladning er systematisk og korrekt tænkt. Dine delbeviser for spændingsniveauerne ved præcis $t = \tau$ og $t = 5\tau$ fungerer fremragende og viser solid matematisk forståelse.
- **Korrekt gennemførte forsøg:** Dit eksperimentelle design er meget stærkt. Ved at fastlægge dine målepunkter til eksakte τ -intervaller (fra 0 til 6τ) frem for blot tilfældige tidspunkter, gør du det utrolig let at validere teorien.
- **Korrekte konklusioner på forsøgsdata sammenholdt med teorien:** Din toleranceanalyse i afsnit 6 er et af rapportens højdepunkter. Du konkluderer helt korrekt og med god fysisk argumentation, at det er kondensatorens tolerance på $\pm 20\%$, der dominerer usikkerheden, og at dine beregnede afvigelser fint holder sig inden for denne ramme.

Hvad der giver minus point

- **Forkert notation:** Rapporten er desværre fyldt med formaterings- og slåfejl. Du skriver "kredsnøb" i stedet for kredsløb flere steder. I dine matematiske udledninger mangler du integrationstegn (du bruger mærkelige tegn som "f" og "S-"). I afsnit 2.2.1 bliver din variabel U_{in} pludselig til "Min", og i fejlpropageringsformlen i afsnit 6.1 mangler der fundamentale operatorer (fx lighedstegn og plus/gange mellem leddene). Endelig har rapporten to afsnit 6 og to afsnit 7, da nummereringen genstarter efter den grafiske analyse.
- **Faktuelle fejl i formler og beregninger:** Dette er rapportens største problem. I afsnit 4.4 og 5.4 isolerer du kapacitansen C . Ved tiden $t = 6\tau$ måler du spændingen til henholdsvis 5,00 V (opladning) og 0,00 V (afladning). Indsætter du dette i formlen, ender du med at skulle tage den naturlige logaritme til nul, $\ln(0)$, hvilket matematisk går mod $-\infty$ og altså er udefineret. Alligevel har du beregnet C til 70,2 μF i begge tilfælde. Denne umulige og forkerte beregning trækker du med ned i din udregning af middelværdien, som derved falder helt ned til 93,7 μF , mens den uden dette fejlpunkt havde ligget flot og præcist omkring 98,4 μF .
- **Fejl i grafer:** Selve dine plot og specielt dine residualplot er rigtig fine, da de bekræfter, at modellen passer, og at afvigelserne ligger inden for voltmeterets usikkerhed. Men du glemmer at angive den faktiske forskrift for den "Tilpasset eksponentialfunktion", som du har bedt programmet fitte.
- **Forkert tolkning af forsøgsdata:** I direkte tråd med regnefejlen ovenfor, tolker du forkert på dine data, når kondensatoren er praksismæssigt fuldt opladet eller

afladet. Som fysiker burde du have stoppet op og indset, at når målingen rammer voltmeterets opløsningsgrænse (nøjagtig 5,00 V eller 0,00 V), bryder din formel sammen på grund af en singularitet, og dette punkt skal ekskluderes fra databehandlingen.

Generel evaluering

Du har leveret et arbejde, der beviser, at du har et stort fagligt overskud. Dit design af forsøget og din teoretiske gennemgang ligger i top. Du viser, at du kan tænke og arbejde som en rigtig fysiker, når du kobler de abstrakte differentiaalligninger direkte ned over dine rådata og udfører en fornuftig usikkerhedsanalyse.

Når den absolutte topkarakter alligevel udebliver, skyldes det udelukkende din mangelfulde korrektur og den manglende kritiske stillingtagen til udregningen af $\ln(0)$. En fysiker lader ikke en matematisk singularitet passere uden en kommentar – og slet ikke ved at give den en specifik talværdi, der efterfølgende ødelægger gennemsnittet. Havde du fjernet dette datapunkt fra gennemsnittet med netop det argument, og havde du luget ud i slåfejlene og den rodede afsnitsstruktur, var vi landet på et sikkert 12-tal.

Karakter:10 (efter 7-trins-skalaen). Et fremragende stykke arbejde, der kun trækkes ned af sløse formateringsfejl og en enkelt, men markant, regnefejl.